20

आव्यूह

19वीं शताब्दी के मध्य में एक ब्रिटिश गणितज्ञ ऑर्थर कैले (1821–1895) ने गणित को एक नई विधा, जिसे आव्यूह (Matrices) कहा गया, को जन्म दिया। उसने युगपत समीकरणों के निकायों को निरुपित करने में आव्यूह का उपयोग किया। आज आव्यूह के सिद्धान्त गणित का एक महत्त्वपूर्ण अंग बन चुके हैं। खेल–सिद्धान्त, व्यय निर्धारण, उपोत्पादन के बजट बनाने, आदि में आव्यूह उपयोग में लाए जाते हैं। अर्थशास्त्री उनका उपयोग सामाजिक लेखा विधि, निवेश–उत्पादन सारणियों तथा अन्र्तउद्योग अर्थशास्त्र के अध्ययन में करते हैं। युगपत समीकरण निकायों के हल करने में आव्यूह विस्तृत रूप से उपयोग में लाये जाते हैं। रैखिक प्रोग्रामन का आधार आव्यूह बीजगणित में ही है। आव्यूह के अनुप्रयोग केवल गणित में ही नहीं, बल्कि अन्य विषयों जैसे भौतिक शास्त्र, रसायन शास्त्र, इन्जीनियरिंग, रैखिक प्रोग्रामन, आदि में भी भरपूर मिलते हैं।

इस पाठ में हम आव्यूह के विभिन्न प्रकारों तथा आव्यूह पर बीजीय संक्रियाओं के विषय में विस्तार से चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगेः

- आव्यूह को परिभाषित करना, उसका क्रम बताना तथा उदाहरण देना
- विभिन्न प्रकार के आव्यूह–जैसे वर्ग आव्यूह, आयताकार, इकाई, शून्य, विकर्ण, पंक्ति, स्तंभ को परिभाषित करना तथा उनके उदाहरण देना
- दो आव्यूहों के समान होने का प्रतिबन्ध बताना
- एक आव्यूह का परिवर्त परिभाषित करना
- सममित तथा विषम सममित आव्यूहों को परिभाषित करना तथा उदाहरण देना
- एक ही क्रम वाले दो आव्यूहों के योग तथा अन्तर ज्ञात करना
- एक आव्यूह को अदिश से गुणा करना
- दो आव्यूहों के गुणन के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध बताना
- जहां संभव हो, दो आव्यूहों को गुणा करना
- प्रारंभिक संक्रियाओं का प्रयोग करना
- प्रारंभिक संक्रियाओं का प्रयोग कर आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात करना

टिप्पणी

पूर्व ज्ञान

- संख्या निकाय का ज्ञान
- रैखिक समीकरणों के निकाय का हल

20.1 आव्यूह तथा उनका निरूपण

मान लीजिए कि हम यह अभिव्यक्त करना चाहते हैं कि अनिल के पास 6 पेंसिल हैं। हम इसे [6] या (6) लिखकर, इस समझ के साथ कि [ ] अथवा ( ) के अन्दर लिखी हुई संख्या अनिल के पास होने वाली पेंसिलों की संख्या को दर्शाती है, अभिव्यक्त कर सकते हैं। अगली बार मान लीजिए कि हम यह अभिव्यक्त करना चाहते हैं कि अनिल के पास 2 पुस्तक तथा 5 पेंसिल हैं। हम इसे [2, 5] लिखकर, इस समझ के साथ कि [ ] के अन्दर प्रथम प्रविष्टि अनिल के पास पुस्तकों की संख्या को दर्शाती है, जबकि दूसरी प्रविष्टि पेंसिलों की संख्या बताती हैं, प्रकट कर सकते हैं।

आइए, अब, दो मित्रों श्याम तथा इरफान की स्थिति पर विचार करें। श्याम के पास 2 पुस्तकें, 4 कापियां तथा 2 पैन हैं; तथा इरफान के पास 3 पुस्तकें, 5 कापियां तथा 3 पैन हैं।

इस जानकारी को प्रस्तुत करने का एक सुविधाजनक ढंग इसे नीचे दी गयी सारणी के रूप में लिखना है।

	पुस्तक	कापियां	पैन
श्याम	2	4	2
इरफान	3	5	3

इसे हम संक्षेप में नीचे दी गयी विधि से लिख सकते हैं:

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{प्रथम स्तंभ} & \text{द्वितीय स्तंभ} & \text{तृतीय स्तंभ} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{प्रथम पंक्ति} \\ \text{द्वितीय पंक्ति} \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

उपरोक्त निरूपण निम्नलिखित जानकारी प्रदान करता है:

(1) प्रथम तथा द्वितीय पंक्तियों में प्रविष्टियां क्रमशः श्याम तथा इरफान के पास वस्तुओं की संख्या (पुस्तक, कापियाँ, पैन) दर्शाती है।

(2) प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय स्तंभों में प्रविष्टियां क्रमशः पुस्तकों, कापियों तथा पैनों की संख्या दर्शाती हैं।

इस प्रकार, प्रथम पंक्ति तथा तृतीय स्तंभ में प्रविष्टि श्याम के पास पैनों की संख्या को दर्शाती है। उपर्युक्त प्रदर्शन में प्रत्येक प्रविष्टि की इसी ढंग से व्याख्या की जा सकती है।

उपर्युक्त जानकारी को इस प्रकार भी निरूपित किया जा सकता है:

	श्याम	इरफान
पुस्तक	2	3
कापियां	4	5
पैन	2	3

इस को तीन पंक्तियों तथा दो स्तंभों में निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ऊपर दिखायी गयी व्यवस्था को आव्यूह कहा जाता है। प्रायः आव्यूह को हम अंग्रेजी वर्णमाला के एक बड़े अक्षर यथा A, B, X आदि से निर्दिष्ट करते हैं। इस प्रकार ऊपर दी गयी जानकारी को एक आव्यूह के रूप में निरूपित करने के लिए हम लिखते हैं:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{अथवा} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

टिप्पणी: आव्यूह का वहुवचन भी आव्यूह है।

20.1.1 आव्यूह की कोटि (क्रम)

निम्नलिखित आव्यूहों (संख्याओं की व्यवस्था) को ध्यानपूर्वक देखिए।

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

आव्यूह (a) में दो पंक्तियां तथा दो स्तंभ हैं। इसे $2-2$ आव्यूह अथवा 2×2 कोटि वाला आव्यूह कहा जाता है। इसे 2×2 आव्यूह लिखा जाता है। आव्यूह (b) में तीन पंक्तियां तथा दो स्तंभ हैं। यह एक $3-2$ आव्यूह अथवा 3×2 कोटि वाला आव्यूह है। इसे 3×2 आव्यूह लिखा जाता है। आव्यूह (c) 3×4 कोटि वाला आव्यूह है।

ध्यान दीजिए कि एक आव्यूह में कितनी भी पंक्तियां तथा कितने भी स्तंभ हो सकते हैं। यदि आव्यूह A में m पंकितयां तथा n स्तंभ हैं, तो इस की कोटि $m \times n$ होगी तथा इसे $m \times n$ आव्यूह पढ़ा जायेगा।

दो प्रव्ययों (अनुलग्नों) i तथा j का उपयोग एक आव्यूह के किसी विशेष अवयव का अवलोकन करने में सहायक होता है। उपर्युक्त $m \times n$ आव्यूह में अवथव a_{ij}, i वीं पंक्ति तथा j वे स्तंभ में आता है।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \cdots a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \cdots a_{2j} & \cdots a_{2n} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \cdots a_{3j} & \cdots a_{3n} \\ a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3} \cdots\, a_{ij} & \cdots a_{in} \\ a_{m1}\, a_{m2}\, a_{m3} \cdots a_{mj} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ क्रम वाले एक आव्यूह को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है:

$$A = [a_{ij}],\ i = 1, 2, ..., m; \text{ तथा } j = 1, 2, ..., n$$

उदाहरण 20.1. निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक की कोटि लिखिए:

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

हल: आव्यूह

(i) की कोटि 2×2 है।

(ii) की कोटि 3×1 है।

(iii) की कोटि 1×3 है।

(iv) की कोटि 2×3 है।

उदाहरण 20.2. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ के लिए

(i) A की कोटि ज्ञात कीजिए।

(ii) A के कुल अवयवों की संख्या लिखिए।

(iii) A के अवयव a_{23}, a_{32}, a_{14} तथा a_{34} लिखिए।

(iv) A में प्रत्येक अवयव '3' को a_{ij}. के रूप में लिखिए।

हल: (i) क्योंकि A में 3 पंक्तियां तथा 4 स्तंभ हैं, इस लिए A की कोटि 3×4 है।

(ii) A में कुल अवयवों की संख्या $= 3 \times 4 = 12$

(iii) $a_{23} = 2;\ a_{32} = 2;\ a_{14} = 4$ तथा $a_{34} = 6$

(iv) a_{22}, a_{31} तथा a_{33}

उदाहरण 20.3. यदि एक 2×3 आव्यूह A की i वीं पंक्ति तथा j वें स्तंभ का अवयव $\dfrac{i+2j}{2}$ हो, तो आव्यूह A लिखिए।

हल: यहां $a_{ij} = \dfrac{i+2j}{2}$ (दिया है)

$$a_{11} = \frac{1+2\times1}{2} = \frac{3}{2};\ a_{12} = \frac{1+2\times2}{2} = \frac{5}{2};\ a_{13} = \frac{1+2\times3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$a_{21} = \frac{2+2\times1}{2} = 2;\ a_{22} = \frac{2+2\times2}{2} = 3;\ a_{23} = \frac{2+2\times3}{2} = 4$$

इस प्रकार, $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.4. दो स्टोर A तथा B हैं। स्टोर A में 120 कमीजें, 100 पैंटें तथा 50 कार्डिगन हैं; तथा स्टोर B में 200 कमीजें, 150 पैंटें तथा 100 कार्डिगन हैं। इस जानकारी को दो भिन्न तरीकों से सारणी रूप में तथा आव्यूह रूप में भी व्यक्त कीजिए।

हल: **सारणी रूप 1**

	कमीजें	पैंटें	कार्डिगन
स्टोर A	120	100	50
स्टोर B	200	150	100

आव्यूह रूप

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 120 & 100 & 50 \\ 200 & 150 & 100 \end{bmatrix}$$

सारणी रूप 2

	स्टोर A	**स्टोर B**
कमीजें	120	200
पैंटें	100	150
कार्डिगन	50	100

आव्यूह रूप

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 120 & 200 \\ 100 & 150 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}$$

देखें आपने कितना सीखा 20.1

1. तीन परीक्षाओं में दो विद्यार्थियों A तथा B द्वारा प्राप्त किये गये अंक साथ वाली सारणी में दिए गए हैं। इस जानकारी को दो भिन्न तरीकों में आव्यूह के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

	परीक्षा 1	परीक्षा 2	परीक्षा 3
A	56	65	71
B	29	37	57

2. तीन फर्म X, Y, Z किसी ठेकेदार को क्रमशः पत्थरों के 40, 35 तथा 25 ट्रक तथा रेत के 10, 5 तथा 8 ट्रकों की आपूर्ति करती हैं। दो तरीकों से इस जानकारी को आव्यूह के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

3. एक परिवार P में 4 पुरुष, 6 महिलाएं तथा 3 बच्चे; तथा परिवार Q, में 4 पुरुष, 3 महिलाएं तथा 5 बच्चे हैं। इस जानकारी को एक 2×3 क्रम वाले आव्यूह द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

4. किसी
   (a) 2×3 आव्यूह (b) 3×4 आव्यूह (c) 4×2 आव्यूह
   (d) 6×2 आव्यूह (e) $a\times b$ आव्यूह (f) $m\times n$ आव्यूह
   में कितने–कितने अवयव हैं?

5. किसी आव्यूह के कौन–कौन से संभव क्रम होंगे यदि इसके कुल अवयवों को संख्या
   (a) 8 (b) 5 (c) 12 (d) 16 हो?

6. आव्यूह A में $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 3 & -3 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ज्ञात कीजिये:

   (a) पंक्तियों की संख्या (b) स्तंभों की संख्या

   (c) आव्यूह A की कोटि (d) आव्यूह A के कुल अवयवों की संख्या

   (e) अवयव $a_{14}, a_{23}, a_{34}, a_{45}$ तथा a_{33} ।

7. एक ऐसा 3×3 कोटि वाला आव्यूह बनाइए जिसकी iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ का संगत अवयव है:

   (a) $i - j$ (b) $\dfrac{i^2}{j}$ (c) $\dfrac{(i+2j)^2}{2}$ (d) $3j - 2i$

8. एक ऐसा 3×2 कोटि वाला आव्यूह बनाइए जिसकी iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ का संगत अवयव है:

   (a) $i + 3j$ (b) $5.i.j.$ (c) i^j (d) $i + j - 2$

20.2 आव्यूहों के प्रकार

पंक्ति आव्यूहः एक आव्यूह, जिस में केवल एक पंक्ति हो, पंक्ति आव्यूह कहलाता है। इसमें कितने भी स्तंभ हो सकते हैं, जैसे कि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ एक पंक्ति आव्यूह है। पंक्ति आव्यूह की कोटि $1 \times n$ होती है।

स्तंभ आव्यूहः एक आव्यूह को स्तंभ आव्यूह कहा जाता है यदि इसमें केवल एक स्तंभ हो, किन्तु इसमें कितनी भी पंक्तियां हो सकती हैं, यथा आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ एक स्तंभ आव्यूह है।

एक स्तंभ आव्यूह की कोटि $m \times 1$ होती है।

वर्ग आव्यूहः एक आव्यूह, जिसमें पंक्तियों की संख्या उसके स्तंभों की संख्या के बराबर हो, को वर्ग आव्यूह कहा जाता है, जैसे कि आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

में 3 पंक्तियां तथा 3 स्तंभ हैं, इसलिए यह एक वर्ग आव्यूह है। एक वर्ग आव्यूह की कोटि $n \times n$ अथवा केवल n होती है। एक वर्ग आव्यूह का विकर्ण, जो चोटी के सबसे बायें अवयव से आरंभ होकर उसकी तली के सबसे दायें अवयव पर समाप्त होता है, आव्यूह का मुख्य विकर्ण कहा जाता है। आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ के मुख्य विकर्ण के अवयव 2, 1 तथा 9 हैं।

टिप्पणी: एक दिये हुए $m \times n$ क्रम वाले आव्यूह $A = [a_{ij}]$ में मुख्य विकर्ण के अवयव $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ हैं।

आयताकार आव्यूह: एक आव्यूह, जिस में उसकी पंक्तियों की संख्या उसके स्तंभों की संख्या के बराबर न हो, को एक आयताकार आव्यूह कहा जाता है, जैसे कि आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

जिसमें 3 पंक्तियाँ तथा 4 स्तंभ हैं, एक आयताकार आव्यूह है।

इस बात को नोट कर लीजिए कि क्रम $1 \times n \ (n \neq 1)$ वाला पंक्ति आव्यूह तथा क्रम $m \times 1 \ (m \neq 1)$ वाला स्तंभ आव्यूह दोनों ही आयताकार आव्यूह हैं।

शून्य आव्यूह: एक आव्यूह, जिसका प्रत्येक अवयव शून्य हो, को शून्य आव्यूह कहते हें। उदाहरणार्थ, आव्यूहों में से प्रत्येक एक शून्य आव्यूह है। शून्य आव्यूह को O द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

टिप्पणी: एक शून्य आव्यूह किसी भी क्रम $m \times n$ का हो सकता है।

विकर्ण आव्यूह: एक वर्ग आव्यूह, जिसके मुख्य विकर्ण को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हों, को एक विकर्ण आव्यूह कहा जाता है। अर्थात् यदि $A = [a_{ij}]$ क्रम m $\times$ n वाला एक वर्ग आव्यूह है, तो इसे विकर्ण आव्यूह कहेंगे यदि सभी $i \neq j$ के लिए $a_{ij} = 0$ हो।

उदाहरण के लिए $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ विकर्ण आव्यूह हैं।

टिप्पणी: एक विकर्ण आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ को $A =$ विकर्ण $[a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}]$ भी लिखा जाता है।

अदिश आव्यूह: एक विकर्ण आव्यूह को अदिश आव्यूह कहा जाता है यदि इसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव किसी शून्येतर अचर यथा k के बराबर हों जैसे कि आव्यूह $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ एक अदिश आव्यूह है।

टिप्पणी: एक वर्ग शून्य आव्यूह एक अदिश आव्यूह नहीं होता।

इकाई या तत्समक आव्यूह: एक अदिश आव्यूह को एक इकाई अथवा तत्समक आव्यूह कहा जाता है यदि उसके मुख्य विकर्ण का प्रत्येक अवयव 1 (एक) हो। इसे I_n से निर्दिष्ट किया जाता है यदि इसका कोटि n है, उदाहरणार्थ आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

कोटि 3 वाला एक इकाई आव्यूह है।

टिप्पणी: एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ एक इकाई आव्यूह होता है, यदि $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ हो।

समान आव्यूह: दो आव्यूह समान आव्यूह कहलाते हैं यदि उनकी कोटि समान हो तथा उनके संगत अवयव बराबर हों।

यदि A एक $m \times n$ क्रम वाला आव्यूह है तथा B, $p \times r$ क्रम वाला आव्यूह है, तो $A = B$ होगा यदि

(1) $m = p; n = r;$ तथा

(2) $a_{ij} = b_{ij}$ सभी $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ तथा $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ के लिए

नीचे दिये गए दो आव्यूह X तथा Y समान नहीं हैं क्योंकि उनके क्रम भिन्न हैं जो क्रमशः 2×3 तथा 3×2 हैं।

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

नीचे दिए गए दो आव्यूह भी समान नहीं हैं क्योंकि P के कुछ अवयव Q के संगत अवयवों के बराबर नहीं हैं।

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.5. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह समान हैं अथवा नहीं;

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

हल: (i) आव्यूह A तथा B का एक ही क्रम 2×2 है। किन्तु उनके कुछ संगत अवयव बराबर नहीं हैं। अतएव, $A \neq B$

(ii) आव्यूह P तथा Q के क्रम भिन्न हैं। इसलिए $P \neq Q$

(iii) आव्यूह X तथा Y का एक ही क्रम 3×3 हैं, तथा उनके संगत अवयव भी बराबर हैं। इसलिए $X = Y$

उदाहरण 20.6. x तथा y के मान निर्धारित कीजिए, यदि

(i) $\begin{bmatrix} x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

हलः क्योंकि दो आव्यूह समान हैं, उनके संगत अवयव बराबर होने चाहियें।

(i) $x = 2$

(ii) $x = 4, \ \ y = 3$

(iii) $x = 1, \ y = -5$

उदाहरण 20.7. $a, b, c, d,$ के किन मानों के लिए नीचे दिए गए आव्यूह समान होंगे?

(i) $A = \begin{bmatrix} a & -2 & 2b \\ 6 & 3 & d \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & 5c & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $P = \begin{bmatrix} a & b-2d \\ -3 & 2b \\ a+c & 7 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

हलः (i) दिये गये आव्यूह A तथा B समान होंगे, केवल यदि उनके संगत अवयव बराबर हों, अर्थात् यदि

$a = 1, \ 2b = 4, \ 3 = 5c,$ तथा $d = 2$ हो।

$\Rightarrow \ a = 1, \ b = 2, \ c = \frac{3}{5}$ तथा $d = 2$ हो।

इस प्रकार $a = 1, \ b = 2, \ c = \frac{3}{5}$ तथा $d = 2$ के लिए आव्यूह A तथा B समान होंगे।

(ii) दिये गये आव्यूह P तथा Q समान होंगे, यदि उनके संगत अवयव बराबर हों, अर्थात् यदि

$a = 5, \ b - 2d = 1, \ 2b = 6$ तथा $a + c = 4$

$\Rightarrow \ a = 5, \ b = 3, \ c = -1$ तथा $d = 1$

इस प्रकार $a = 5, \ b = 3, \ c = -1$ तथा $d = 1,$ के लिए P तथा Q समान होंगे।

देखें आपने कितना सीखा 20.2

1. निम्नलिखित आव्यूहों में से कौन–कौन से आव्यूह

(a) पंक्ति आव्यूह हैं? (b) स्तंभ आव्यूह हैं? (c) वर्ग आव्यूह हैं? (d) विकर्ण आव्यूह हैं? (e) अदिश आव्यूह हैं? (f) समान आव्यूह हैं? (g) शून्य आव्यूह हैं?

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&5&0\\0&0&6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\7\\8\\0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&9&8\\1&0&2\end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ G=\begin{bmatrix}3&4&10&8\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}2&3&7\\1&4&9\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\\-1&0\end{bmatrix}$$

2. a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $\begin{bmatrix}b&2c\\b+d&c-2a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&12\\8&2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}a+2&4\\b+3&25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2c\\6&5d\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}2a&b\\-4&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\d&3c\end{bmatrix}$

3. क्या एक 1×2 क्रम वाला आव्यूह क्रम 2×1 वाले आव्यूह के समान हो सकता है?

4. क्या एक क्रम 2×3 वाला आव्यूह क्रम 3×3 वाले आव्यूह के समान हो सकता है?

20.3 एक आव्यूह का परिवर्त

प्रत्येक दिये हुए आव्यूह का एक सहयोगी आव्यूह होता है जिसे उसका परिवर्त कहते हैं। एक दिये हुए आव्यूह A का परिवर्त इसकी पंक्तियों तथा स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त होता है तथा इस A' द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। उदाहरणार्थ, यदि

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\4&0&3\\7&6&1\end{bmatrix},\ \text{तब } A'=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&0&6\\-3&3&1\end{bmatrix}$$

साधारणत:, यदि $A=[a_{ij}]$ एक $m\times n$ आव्यूह है, तो A का परिवर्त A', $n\times m$ आव्यूह होगा तथा A का (a_{ij}) वाँ अवयव A' के (a_{ji}) वें अवयव के बराबर होगा।

20.3.1 सममित आव्यूह

एक वर्ग आव्यूह एक सममित आव्यूह कहलाता है यदि $A' = A$ हो।

उदाहरणार्थ,

यदि $A=\begin{bmatrix}2&3i&1-i\\3i&4&2i\\1-i&2i&5\end{bmatrix}$,तो $A'=\begin{bmatrix}2&3i&1-i\\3i&4&2i\\1-i&2i&5\end{bmatrix}$

क्योंकि $A' = A$, तो A एक सममित आव्यूह है।

टिप्पणी: (1) एक सममित आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, में, सभी i तथा j के लिए $a_{ij} = a_{ji}$ होगा।

(2) एक आयताकार आव्यूह कभी सममित नहीं हो सकता।

20.3.2 विषम सममित आव्यूह

एक वर्ग आव्यूह A को विषम सममित आव्यूह कहा जाता है यदि $A' = -A,$ अर्थात् सभी i तथा j के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$ हो।

उदाहरणार्थ, यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & c & d \\ -c & 0 & f \\ -d & -f & 0 \end{bmatrix}$ है, तो $A' = \begin{bmatrix} 0 & -c & -d \\ c & 0 & -f \\ d & f & 0 \end{bmatrix}$

किन्तु $-A = \begin{bmatrix} 0 & -c & -d \\ c & 0 & -f \\ d & f & 0 \end{bmatrix}$, जो A' के समान है अर्थात $A' = -A$

अएतव, A एक विषम सममित आव्यूह है।

टिप्पणी: एक विषम सममित आव्यूह $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ में $i = j$ के लिए $a_{ij} = 0$ होता है अर्थात् एक विषम सममित आव्यूह के मुख्य विकर्ण में सभी अवयव शून्य होते हैं।

20.4 एक आव्यूह का अदिश गुणन

आइए निम्नलिखित परिस्थिति पर विचार करें।

तीन विद्यार्थियों द्वारा अंग्रेजी, हिन्दी तथा गणित में प्राप्त किए गए अंक नीचे दिए गए हैं:

	अंग्रेजी	हिन्दी	गणित
एलिजाबेथ	20	10	15
ऊषा	22	25	27
शबनम	17	25	21

यह भी दिया हुआ है कि प्रत्येक दशा में पूर्णांक 30 हैं।

आव्यूह के रूप में उपर्युक्त जानकारी को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 22 & 25 & 27 \\ 17 & 25 & 21 \end{bmatrix}$$

(यह समझा जाता है कि पंक्तियाँ नामों के संगत तथा स्तंभ विषयों के संगत हैं।)

यदि प्रत्येक दशा में पूर्णांक को दुगुना कर दिया जाए, तो लड़कियों द्वारा प्राप्तांक भी दुगुने हो जायेंगे। आव्यूह के रूप में नये अंकों को निम्नलिखित तरीके से प्रदर्शित किया जायेगा:

$$\begin{bmatrix} 2\times 20 & 2\times 10 & 2\times 15 \\ 2\times 22 & 2\times 25 & 2\times 27 \\ 2\times 17 & 2\times 25 & 2\times 21 \end{bmatrix} \text{ जो } \begin{bmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 44 & 50 & 54 \\ 34 & 50 & 42 \end{bmatrix} \text{ के बराबर है।}$$

इसलिए हम लिखते है कि

$$2\times\begin{bmatrix}20 & 10 & 15\\ 22 & 25 & 27\\ 17 & 25 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 20 & 2\times 10 & 2\times 15\\ 2\times 22 & 2\times 25 & 2\times 27\\ 2\times 17 & 2\times 25 & 2\times 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40 & 20 & 30\\ 44 & 50 & 54\\ 34 & 50 & 42\end{bmatrix}$$

अब एक अन्य आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 6\end{bmatrix}$ पर विचार कीजिये।

आइए देखें कि जब हम आव्यूह A को 5 से गुणा करते हैं, तो क्या होता है।

अर्थात् $$5\times A=5A=5\times\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times 3 & 5\times 2\\ 5\times(-2) & 5\times 0\\ 5\times 1 & 5\times 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 10\\ -10 & 0\\ 5 & 30\end{bmatrix}$$

जब एक अदिश से किसी आव्यूह को गुणा किया जाता है, तो उसके प्रत्येक अवयव को उस अदिश से गुणा किया जाता है।

उदाहरणार्थ

यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो $kA=\begin{bmatrix}k\times 2 & k\times(-1)\\ k\times 6 & k\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k & -k\\ 6k & 3k\end{bmatrix}$

जब $k=-1$ होगा, तो $kA=(-1)A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}$ होगा।

इसलिए $(-1)A=-A$

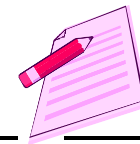
इस प्रकार, यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो $-A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -6 & -3\end{bmatrix}$ होगा।

उदाहरण 20.8. यदि $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो निम्न ज्ञात कीजिए:

(i) $2A$ (ii) $\frac{1}{2}A$ (iii) $-A$ (iv) $\frac{2}{3}A$

हल: यहां (i) यहां $2A=2\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times(-2) & 2\times 3 & 2\times 4\\ 2\times(-1) & 2\times 0 & 2\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6 & 8\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

(ii) $$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\times(-2) & \frac{1}{2}\times 3 & \frac{1}{2}\times 4\\ \frac{1}{2}\times(-1) & \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{2} & 2\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$



(iii) $-A = (-1) \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(iv) $\frac{2}{3} A = \frac{2}{3} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.3

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए:

   (a) $4A$ (b) $-A$ (c) $\frac{1}{2}A$ (d) $-\frac{3}{2}A$

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

   (a) $5A$ (b) $-3A$ (c) $\frac{1}{3}A$ (d) $-\frac{1}{2}A$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ हो, तो $(-7)\,A$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

   (a) $5X$ (b) $-4X$ (c) $\frac{1}{3}X$ (d) $-\frac{1}{2}X$

5. A' (A का परिवर्त) ज्ञात कीजिए:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. किसी आव्यूह, A के लिए, सिद्ध कीजिए कि $(A')' = A$

7. दिखाइए कि निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक एक सममित आव्यूह है:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. दिखाइए कि निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक एक विषम सममित आव्यूह है:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & i & 4 \\ -i & 0 & 2-i \\ -4 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

20.5 आव्यूहों का योग

दो छात्र A तथा B दो परीक्षाओं में गणित, भौतिकी तथा अंग्रेजी में प्राप्त अपने अंकों की तुलना करते हैं। प्रत्येक विषय के पूर्णांक 50 हैं। उनके द्वारा प्राप्तांक नीचे दिये गए हैं।

प्रथम परीक्षा

$$\begin{array}{cc} & \text{गणित} \quad \text{भौतिकी} \quad \text{अंग्रेजी} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 50 & 38 & 33 \\ 47 & 40 & 36 \end{bmatrix} \end{array}$$

द्वितीय परीक्षा

$$\begin{array}{cc} & \text{गणित} \quad \text{भौतिकी} \quad \text{अंग्रेजी} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 45 & 32 & 30 \\ 42 & 30 & 39 \end{bmatrix} \end{array}$$

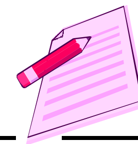
दोनों परीक्षाओं में कुल मिलाकर प्रत्येक विषय में उनके द्वारा प्राप्त किए गये अंक हम कैसे ज्ञात करेंगे?

ध्यान से देखिए कि दोनों आव्यूहों की संयुक्त जानकारी को प्रदान करने वाला नया आव्यूह है:

$$\begin{array}{cc} & \text{गणित} \quad \text{भौतिकी} \quad \text{अंग्रेजी} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 50+45 & 38+32 & 33+30 \\ 47+42 & 40+30 & 36+39 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \text{गणित} \quad \text{भौतिकी} \quad \text{अंग्रेजी} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 95 & 70 & 63 \\ 89 & 70 & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

यह नया आव्यूह दिये हुए आव्यूहों का योग कहलाता है।

यदि A तथा B एक ही क्रम के दो आव्यूह दिये गये हों, तो उनका योग एक आव्यूह C जिस के क्रमवार अवयव आव्यूहों A तथा B के संगत अवयवों के योगफल हों, द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा इसे $C = A + B$ के रूप में लिखते हैं।



टिप्पणीः
1. आव्यूह C का क्रम भी वही होगा जो कि A तथा B का
2. दो भिन्न क्रम वाले आव्यूहों का योग करना संभव नहीं है।

उदाहरण 20.9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो $A + B$ ज्ञात कीजिए।

हलः क्योंकि दिये गए आव्यूह A तथा B समान क्रम 2×2 के हैं, हम उनका योग कर सकते हैं। इसलिए

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 3+2 \\ 4+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.10. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो $A + B$ ज्ञात कीजिए।

हलः क्योंकि दिये गये आव्यूह समान क्रम अर्थात् 2×3 के हैं, हम उनका योग कर सकते हैं। इसलिए

$$A + B = \begin{bmatrix} 0+3 & 1+0 & -1+4 \\ 2+1 & 3+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

20.5.1 योग के गुण

स्मरण कीजिए कि संख्याओं में हमने प्राप्त किया है:

(i) $x + y = y + x$, अर्थात् योग क्रम विनिमेय है।

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, अर्थात् योग सहचारी है।

(iii) $x + 0 = x$, योग के तत्समक अवयव का अस्तित्व है।

(iv) $x + (-x) = 0$, अर्थात् योज्य–व्युत्क्रम का अस्तित्व है।

आइए, अब खोज करें कि ये गुण आव्यूहों में भी सही ठहरते हैं अथवा नहीं।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, तब

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2-2 \\ -1+1 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

तथा

$$B + A = \begin{bmatrix} 0+1 & -2+2 \\ 1+(-1) & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि $A + B$ तथा $B + A$ एक ही आव्यूह को निर्दिष्ट करते हैं।

एक ही क्रम वाले दो आव्यूहों A तथा B के लिए, $A + B = B + A$
अर्थात् आव्यूहों का योग क्रम विनिमेय होता है।

टिप्पणी

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. तब

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+1 & -4+0 \\ 0+2 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2 & 3+(-4) \\ -2+2 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

तथा $$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 0+1 & 3+(-4) \\ -2+0 & 1+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & -1+0 \\ -2+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि $A + (B + C)$ तथा $(A + B) + C$ एक ही आव्यूह को निर्दिष्ट करते हैं। इस प्रकार, व्यापक रूप में

एक ही क्रम के तीन आव्यूहों A, B तथा C के लिए
$A + (B + C) = (A + B) + C$ होता है अर्थात् आव्यूहों का योग सहचारी होता है।

स्मरण कीजिए कि हमने शून्य आव्यूह के विषय में बात की है। एक शून्य आव्यूह वह आव्यूह है जिसके सभी अवयव शून्य होते हैं। यह किसी भी क्रम का हो सकता है।

मान लीजिए, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ तब

$$A + O = \begin{bmatrix} 2+0 & -2+0 \\ 4+0 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

तथा $$O + A = \begin{bmatrix} 0+2 & 0-2 \\ 0+4 & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

हम देखते हैं कि $A + O$ तथा $O + A$ उसी आव्यूह A को निर्दिष्ट करते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$A + O = A = O + A$, जहां O एक शून्य आव्यूह है।

आव्यूह O, जो शून्य आव्यूह है, को योग का तत्समक आव्यूह कहा जाता है।

योग का तत्समक आव्यूह एक शून्य आव्यूह होता है जिसे दिए हुए आव्यूह में जोड़ने पर वही आव्यूह प्राप्त होता है, अर्थात् $A + O = A = O + A$.

उदाहरण 20.11. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो,

तो (a) $A + B$ (b) $B + C$ (c) $(A + B) + C$ (d) $A + (B + C)$

ज्ञात कीजिए।

हल:

(a) $$A+B=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+(-3) & 0+1\\1+1 & 3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 5\end{bmatrix}$$

(b) $$B+C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-3)+(-1) & 1+0\\1+0 & 2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}$$

(c) $$(A+B)+C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)+(-1) & 1+0\\2+0 & 5+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & 8\end{bmatrix}$$

(d) $$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+(-4) & 0+1\\1+1 & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & 8\end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.12. यदि $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ तथा $O=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(a) $A+O$ (b) $O+A$ ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

हल: (a) $$A+O=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2+0 & 3+0 & 5+0\\1+0 & -1+0 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

(b) $$O+A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+(-2) & 0+3 & 0+5\\0+1 & 0+(-1) & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

(a) तथा (b), से हम देखते हैं कि

$$A+O=O+A=A$$

20.6 आव्यूहों का व्यवकलन

मान लीजिए कि A तथा B एक ही क्रम के दो आव्यूह हैं। तब आव्यूह A−B को A से B के व्यवकलन के रूप में परिभाषित किया जाता है। A के अवयवों में से B के संगत अवयव घटाने से A− B प्राप्त होता है। हम लिख सकते हैं:

$$A-B=A+(-B)$$

टिप्पणी: ***A−B तथा B−A एक ही आव्यूह को निर्दिष्ट नहीं करते जब तक कि A= B न हो।***

उदाहरण 20.13. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो

(a) $A-B$ (b) $B-A$ ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

हल: (a) हम जानते हैं कि

$$A - B = A + (-B) \qquad \text{(i)}$$

क्योंकि $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, हम प्राप्त करते हैं $-B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

इसे (i) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 0+(-2) \\ 2+(-1) & (-1)+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(b) इसी प्रकार,

$$B - A = B + (-A)$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 2+0 \\ 1+(-2) & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी: $A-B$ प्राप्त करने के लिए हम A के अवयवों में से B के संगत अवयव सीधे घटा सकते हैं।

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & 0-2 \\ 2-1 & -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

तथा $$B - A = \begin{bmatrix} 3-1 & 2-0 \\ 1-2 & 4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.14. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ तथा $A+B = O$, हो तो B ज्ञात कीजिए।

हल: यहां यह दिया गया है कि A+B = O

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2+a & 3+b \\ -1+c & 4+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + a = 0 \quad ; \quad 3 + b = 0$$

$$-1 + c = 0 \quad ; \quad 4 + d = 0$$

$\Rightarrow \quad a = -2;\ b = -3;\quad c = 1$ तथा $d = -4$

$$\therefore \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी: उदाहरण 20.15 में B के अवयव A के संगत अवयवों के योज्य–व्युत्क्रम हैं। इसलिए हम आव्यूह B को आव्यूह A का योज्य–व्युत्क्रम कहते हैं। साथ ही,

$$B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}=(-1)\times\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}=(-1)\times A=-A$$

व्यापक रूप में हम कह सकते हैं कि यदि एक आव्यूह ***A*** दिया हो, और एक ऐसे अन्य आव्यूह ***B* = (− 1) A** का अस्तित्व हो ताकि ***A* + *B*= *O*** हो, तो ऐसे आव्यूह ***B*** को आव्यूह ***A*** का योज्य–व्युत्क्रम कहा जाता है।

देखें आपने कितना सीखा 20.4

1. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) $A+B$ (b) $2A+B$ (c) $A+3B$ (d) $2A+3B$ ज्ञात कीजिए।

2. यदि $P=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix}$ तथा $Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) $P-Q$ (b) $Q-P$ (c) $P-2Q$ (d) $2Q-3P$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 0\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) $A+B$ (b) $A-B$ (c) $-A+B$ (d) $3A+2B$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो शून्य आव्यूह O, जो $A+O=A$

   को सन्तुष्ट करता हो, ज्ञात कीजिये।

5. यदि $A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) $-A$ (b) $A+(-A)$ (c) $(-A)+A$ ज्ञात कीजिए।

6. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ हो, तो

   ज्ञात कीजिए:

   (a) $2A$ (b) $3B$ (c) $2A+3B$ (d) यदि $2A+3B+5X=O$ हो, तो X क्या होगा?

7. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) A' (b) B' (c) $A+B$ (d) $(A+B)'$ (e) $A'+B'$ ज्ञात कीजिये!

टिप्पणी

आप क्या देखते हैं?

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

ज्ञात कीजिए:

(a) A−B (b) B−C (c) A−C (d) 3B−2C (e) A−B−C (f) 2A−B−3C

20.7 आव्यूहों का गुणन

सैलीना तथा राखी दो मित्र हैं। सैलीना 17 किग्रा. गेहूँ, 3 किग्रा. दालें तथा 250 ग्रा. घी खरीदना चाहती हैं? जबकि राखी 15 किग्रा. गेहूँ, 2 किग्रा. दालें तथा 500 ग्रा. घी खरीदना चाहती है। गेहूँ, दालों तथा घी के प्रति किग्रा. मूल्य क्रमशः 8.00 रु., 27.00 रु. तथा 90.00 रु. है। उनमें से प्रत्येक कितनी धन राशि व्यय करेगी? स्पष्टतः, सैलीना तथा राखी को जितनी धन राशि की आवश्यकता होंगी उसे नीचे दिया गया है:

सैलीना

17 किग्रा. गेहूँ का मूल्य $\Rightarrow 17 \times 8$ रु. $= 136.00$ रु.

3 किग्रा. दालों का मूल्य $\Rightarrow 03 \times 27$ रु. $= 81.00$ रु.

250 ग्रा. घी का मूल्य $\Rightarrow \frac{1}{4} \times 90$ रु. $= 22.50$ रु.

योग $= 239.50$ रु.

राखी

15 किग्रा. गेहूँ का मूल्य $\Rightarrow 15 \times 8$ रु. $= 120.00$ रु.

2 किग्रा. दालों का मूल्य $\Rightarrow 2 \times 27$ रु. $= 54.00$ रु.

500 ग्रा. घी का मूल्य $\Rightarrow \frac{1}{2} \times 90$ रु. $= 45.00$ रु.

योग $= 219.00$ रु.

आव्यूह के रूप में उपर्युक्त जानकारी को निम्नलिखित ढंग से प्रदर्शित किया जा सकता है:

आवश्यकताएं मूल्य आवश्यक धन राशि

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \times 8 + 3 \times 27 + 0.250 \times 90 \\ 15 \times 8 + 2 \times 27 + 0.500 \times 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239.50 \\ 219.00 \end{bmatrix}$$

उसी बस्ती में एक अन्य दुकान पर निम्नलिखित मूल्य लिखे गए हैं:

गेहूँ, : 9 रु. प्रति किग्रा.; दालें : 26 रु. प्रति किग्रा. घी : 100 प्रति किग्रा.

सौलीना तथा राखी को इस दुकान से अपनी वांछित वस्तुओं की मात्रा खदीदने के लिए निम्नलिखित धन राशि की आवश्यकता होगी।

सैलीना

17 किग्रा. गेहूँ, $\Rightarrow 17 \times 9$ रु. $= 153.00$ रु.

3 किग्रा. दालें $\Rightarrow 3 \times 26$ रु. $= 78.00$ रु.

250 ग्रा. घी $\Rightarrow \frac{1}{4} \times 100$ रु. $= 25.00$ रु.

कुल $= 256.00$ रु.

राखी

15 किग्रा. गेहूँ,	$\Rightarrow 15 \times 9$ रु.	$= 135.00$ रु.
02 किग्रा. दालें	$\Rightarrow 2 \times 26$ रु.	$= 52.00$ रु.
500 ग्रा. घी	$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 100$ रु.	$= 50.00$ रु.
	कुल	$= 237.00$ रु.

आव्यूह के रूप में उपरोक्त जानकारी को निम्नलिखित ढंग से प्रदर्शित किया जा सकता है।

आवश्यकताएं मूल्य आवश्यक धन राशि (रु. में)

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.00 \\ 26.00 \\ 100.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \times 9.00 + 3 \times 26.00 + 0.250 \times 100 \\ 15 \times 900 + 2 \times 26.00 + 0.500 \times 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256.00 \\ 237.00 \end{bmatrix}$$

एक तुलनात्मक अध्ययन के लिए, दोनों जानकारियों को निम्नलिखित ढंग से एकत्रित किया जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.00 & 9.00 \\ 27.00 & 26.00 \\ 90.00 & 100.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239.50 & 256.00 \\ 219.00 & 237.00 \end{bmatrix}$$

आइए देखें कि कैसे और कब हम इस गुणनफल को लिखते हैं:

(i) प्रथम आव्यूह की पहली पंक्ति के तीन अवयवों को दूसरे आव्यूह के प्रथम स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा किया जाता है तथा उनका योग किया जाता है। यह योगफल गुणनफल–आव्यूह की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव होता है। उसी ढंग से पहले आव्यूह की दूसरी पंक्ति के अवयवों को दूसरे आव्यूह के प्रथम स्तंभ के संगत अवयवों से गुणा करके जोड़ा जाता है। यह योगफल गुणनफल–आव्यूह की दूसरी पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ का अवयव होता है; तथा इसी प्रकार गुणनफल आव्यूह के अन्य अवयव प्राप्त किये जाते हैं।

(ii) पहले आव्यूह के स्तंभों की संख्या दूसरे आव्यूह को पंक्तियों की संख्या के बराबर है ताकि प्रथम आव्यूह दूसरे आव्यूह द्वारा गुणा किये जाने के अनुकूल है।

इस प्रकार, यदि $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$

तब, $A \times B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 \end{bmatrix}$

परिभाषा: यदि A तथा B दो आव्यूह क्रमशः $m \times p$ तथा $p \times n$ क्रम वाले हों, तो उनका गुणनफल एक $m \times n$ क्रम वाला आव्यूह C होगा; तथा यदि a_{ij}, b_{ij} तथा c_{ij} क्रमशः A, B तथा C आव्यूहों को iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ के अवयव हों, तो

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

उदाहरण 20.15. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

ज्ञात कीजिए: (a) AB (b) BA क्या $AB = BA$ है?

हल: A का क्रम 1×3 है।

B का क्रम 3×1 है।

$\therefore$ A के स्तंभों की संख्या $= B$ की पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ AB का अस्तित्व है।

$$\text{अब, } AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 0 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $AB = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$, 1×1 क्रम का आव्यूह

पुनः, B के स्तंभों की संख्या $= A$ की पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ BA का अस्तित्व है।

$$\text{अब, } BA = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 1 & (-2) \times (-1) & (-2) \times 2 \\ 0 \times 1 & 0 \times (-1) & 0 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times (-1) & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{इस प्रकार, } BA = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \ 3 \times 3 \text{ क्रम का आव्यूह}$$

ऊपर की सभी चर्चा से हम पाते हैं कि $AB \neq BA$।

उदाहरण 20.16. आव्यूहों A तथा B के लिए, यदि संभव हो, AB तथा BA ज्ञात कीजिए जबकि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

हल: यहां A के स्तंभों की संख्या $\neq$ B की पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ AB का अस्तित्व नहीं है।

पुनः, B के स्तंभों की संख्या $\neq$ A की पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ BA का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 20.17. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

AB तथा BA ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि AB = BA है अथवा नहीं।

हल: यहां, A के स्तंभों की संख्या = B को पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ AB का अस्तित्व है।

B के स्तंभों की संख्या = A को पंक्तियों की संख्या

$\therefore$ BA का अस्तित्व है।

अब, $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 2+2\times 2 & 1\times 1+2\times 2 \\ -1\times 2+0\times 2 & -1\times 1+0\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4 & 1+4 \\ -2+0 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

तथा $$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1+1\times(-1) & 2\times 2+1\times 0 \\ 2\times 1+2\times(-1) & 2\times 2+2\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 4+0 \\ 2-2 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

इस प्रकार, $AB \neq BA$

टिप्पणी: हम देखते हैं कि AB तथा BA एक ही क्रम 2×2, वाले हैं, फिर भी $AB \neq BA$ है।

उदाहरण 20.18. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ हो, तो

AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या $AB = BA$ है?

हल: यहां दोनों A तथा B का क्रम 2×2 है। इस लिए दोनों AB तथा BA के अस्तित्व हैं। अब,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \text{ तथा}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

यहां, दोनों AB तथा BA एक ही क्रम के हैं तथा $AB = BA$ भी हैं।

अतएव, यदि दो आव्यूहों A तथा B को गुणा किया जाए, तो निम्नलिखित पांच स्थितियां उत्पन्न होती हैं;

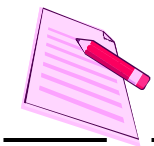
(i) दोनों AB तथा BA के अस्तित्व होते हैं, किन्तु उनके क्रम भिन्न होते हैं

(ii) केवल एक गुणनफल AB अथवा BA का अस्तित्व होता है।

(iii) AB तथा BA में से किसी का भी अस्तित्व नहीं होता।

(iv) दोनों AB तथा BA के अस्तित्व होते हैं तथा उनके क्रम भी एक ही होते हैं, किन्तु $AB \neq BA$ होता है।

(v) दोनों AB तथा BA के अस्तित्व होते हैं तथा उनके क्रम भी एक ही होते हैं। साथ ही $AB = BA$ होता है।



उदाहरण 20.19. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $A^2-2A-3I=O$

हल: यहां, $A^2=AA=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+0 & 0+0\\0+0 & 0+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{bmatrix}$

$$2A=2\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{bmatrix} \quad \text{तथा} \quad 3I=3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A-3I \quad =\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 0\\0 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-9 & 0-0\\0-0 & 9-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=O$$

अतएव, सत्यापित हुआ।

उदाहरण 20.22. आव्यूह समीकरण $\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ हल कीजिए।

हल: यहां बायां पक्ष $=\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-3y\\x+y\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2x-3y\\x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\Rightarrow 2x-3y=1; x+y=3$$

इन समीकरणों को हल करने पर हम प्राप्त करते हैं:

x= 2 तथा y = 1

उदाहरण 20.21. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$, तो AB ज्ञात कीजिये।

हल: यहां, $AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-1)+1\times 11\times 1+1\times(-1)\\1\times(-1)+1\times 11\times 1+1\times(-1)\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1+1 & 1-1\\-1+1 & 1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=O$$

टिप्पणी: उदाहरण 3.23से हमें ज्ञात होता है कि दो शून्येतर आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह हो सकता है, अर्थात् $A\neq O$ तथा $B\neq O$ तब भी $AB=O$ हो सकता है।

अतएव, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दो शून्येतर आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह हो सकता है, जबकि संख्याओं में दो शून्योतर संख्याओं का गुणनफल सदा शून्येतर होता है।

उदाहरण 20.22. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

के लिए (a) $(AB)C$ (b) $A(BC)$ ज्ञात कीजिये

क्या $(AB)\ C = A\ (BC)$ है?

हल: (a)

$$(AB)C = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 0-4 \\ 12-5 & 0+10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+0 & 0-12 \\ -7+0 & 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -7 & 30 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4+0 & 0+0 \\ 1+0 & 0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-2 & 0-12 \\ -12+5 & 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -7 & 30 \end{bmatrix}$$

(a) तथा (b) से हम पाते हैं कि $(AB)C = A(BC)$, अर्थात् आव्यूह गुणन सहचारी होता है।

देखें आपने कितना सीखा 20.5

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या $AB=BA$ है?

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या AB = BA है?

3. यदि $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA में से जिस का भी अस्तित्व हो, उसे ज्ञात कीजिए।

4. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ हो, तो BA ज्ञात कीजिए। क्या AB का अस्तित्व है?

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ हो, तो

   (a) क्या AB का अस्तित्व है? क्यों? (b) क्या BA का अस्तित्व है? क्यों?

6. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या AB=BA है?

7. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 5 & 4\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो

AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या AB=BA है?

8. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ हो तो, AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या AB=BA है?

9. x तथा y के मान ज्ञात कीजिए यदि

(a) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 7\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -3\end{bmatrix}$ हो।

10. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि AB=O है।

11. $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

$A^2-5A+I=O$, जहां I एक दो क्रम वाला इकाई आव्यूह है।

12. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो निम्न ज्ञात कीजिए:

(a) A(BC) (b) (AB)C (c) (A+B)C

(d) AC+BC (e) A^2-B^2 (f) (A−B) (A+B)

13. यदि $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ हो, तो (a) AC (b) BC

ज्ञात कीजिए।

क्या AC = BC है? आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

14. यदि $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & -1\end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए:

(a) B+C (b) A (B+C) (c) AB (d) AC (e) AB+AC

ध्यान पूर्वक देखने से आप क्या पाते हैं?

15. आव्यूहों $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $(AB)'=B'A'$

16. यदि $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$ हो, तो ऐसा आव्यूह X ज्ञात कीजिए कि $AX = B$ हो।

17. यदि $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए कि $A^2-(a+d)\,A = (bc-ad)\,I$

18 यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो क्या, यह सत्य है कि

(a) $(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$? (b) $(A-B)^2 = A^2+B^2-2AB$?

(c) $(A+B)\,(A-B) = A^2-B^2$?

20.8 व्युत्क्रमणीय आव्यूह

परिभाषा: 'A' एक n क्रम का वर्ग आव्यूह व्युत्क्रमणीय होता है यदि 'B' दूसरा उसी क्रम (n) का आव्यूह, इस तरह है कि

$AB = I_n = BA$, जहाँ I_n तत्समक (n कोटि का) आव्यूह हो।

इस तरह के अवसर पर, A का व्युत्क्रम B होता है तथा $A^{-1} = B$ लिखते हैं।

प्रमेय 1 : प्रत्येक व्युत्क्रमणीय आव्यूह का एक अद्वितीय व्युत्क्रम होता है।

उपपत्ति : माना A एक n क्रम का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

माना B, तथा C आव्यूह A के दो व्युत्क्रम हैं।

तब $AB = BA = I_n$ ...(*i*)

तथा $AC = CA = I_n$ ...(*ii*)

अब $AB = I_n$

$\Rightarrow$ $C(AB) = C\,I_n$ ['C' से पहले गुणा करने पर]

$\Rightarrow$ $(CA)\,B = C\,I_n$ [साहचर्य गुण द्वारा]

$\Rightarrow$ $I_n\,B = C\,I_n$ ($\because$ $CA = I_n$ समीकरण (*ii*) से]

$\Rightarrow$ $B = C$ [$\because$ $I_n\,B = B,\ C\,I_n = C$]

अतः एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह का एक विशेष (अद्वितीय) व्युत्क्रम होता है।

उपप्रमेय : यदि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो $(A^{-1})^{-1} = A$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $A\ A^{-1} = I = A^{-1}A$

$\Rightarrow$ A, A^{-1} का व्युत्क्रम हुआ

अतः $A = (A^{-1})^{-1}$

प्रमेय 2: एक वर्ग आव्यूह तभी व्युत्क्रमणीय होगा जब वह अव्युत्क्रमणीय नहीं है।

उपपत्ति: माना A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। तब B आव्यूह इस तरह है कि $AB = I_n = BA$

$\Rightarrow$ $|AB| = |I_n|$ $\Rightarrow$ $|A|\,|B| = 1$ $\Rightarrow$ $|A| \neq 0$

$\Rightarrow$ A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

विलोमत : माना A, n कोटि का एक व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है।

तब

$$\Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right) = I_n = \left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right)A \quad \left[\because |A| \neq 0 \therefore \frac{1}{|A|} \text{ का मान होगा}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj\ A \qquad \text{[व्युत्क्रम की परिभाषा]}$$

अतः A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह होगा।

टिप्पणी: यह प्रमेय व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम जानने के लिए उपयोगी है।

A का व्युत्क्रम

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj\ A$$

20.9 एक आव्यूह पर प्रारम्भिक रूपांतरण अथवा प्रारम्भिक संक्रियाएँ

निम्न तीन संक्रियाओं का किसी आव्यूह की पंक्तियों (स्तंभ) पर प्रयोग प्रारम्भिक पंक्ति (स्तंभ) रूपांतरण कहलाता है।

(i) दो पंक्तियों (स्तंभों) को परस्पर बदलना

किसी आव्यूह में 'i' वीं पंक्ति (स्तंभ) को 'j' वीं पंक्ति (स्तम्भ) से परस्पर बदलने को $R_i \leftrightarrow R_j$ $(C_i \leftrightarrow C_j)$ से निर्दिष्ट करते हैं।

उदाहरणार्थ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, तब $R_2 \leftrightarrow R_3$ का निरूपण करने पर

हमें B आव्यूह मिलता है–

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

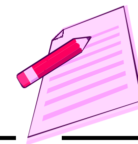
(ii) किसी आव्यूह के किसी पंक्ति (स्तंभ) के सभी अवयवों को एक शून्येत्तर अदिश से गुणा करने पर :

यदि 'i' वीं पंक्ति (स्तंभ) के अवयवों को एक शून्येतर अदिश k, से गुणा किया जाए तो उसे $R_i \rightarrow k\ R_i$ $[C_i \rightarrow k\ C_i]$ से निर्दिष्ट करते हैं

उदाहरणार्थ :

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, तब $R_1 \rightarrow 2R_1$ के निरूपण करने पर निम्न B मिलता है।

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$



(iii) किसी पंक्ति (स्तंभ) के अवयवों को किसी अन्य पंक्ति (स्तंभ) के संगत अवयवों को किसी अदिश से गुणा करके जोड़ना–इसे $R_i \to R_i + kR_j$ $(C_i \to C_i + k\,C_j)$ से निरूपण करते हैं।

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, पर $R_3 \to R_3 + 2R_1$ निरूपित करते हैं तो हमें आव्यूह B मिलता है

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

20.10 प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा एक आव्यूह का व्युत्क्रम

प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं या स्तंभ संक्रियाओं, परन्तु दोनों एक साथ नहीं, प्रयोग करते हुए एक आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कर सकते हैं जबकि उसका अस्तित्व हो।

माना 'A' n कोटि का एक व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है।

यदि हम प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा A^{-1} प्राप्त करना चाहते हैं तो

$A = I_n A$ लिखते हैं ...(i)

एक प्रारिम्भक पंक्ति संक्रिया में दो आव्यूह के गुणन को उसी प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया के अग्रिम गुणनखण्ड से प्रभावित किया जा सकता है।

हम प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं प्रयोग समीकरण (i) पर तब तक करते हैं जब तक बायाँ पक्ष I_n तथा दायाँ पक्ष में (संगत प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग I_n के अग्रिम (पूर्व) गुणन करने के बाद)

हम पाते हैं $\quad I_n = BA$ ...(ii)

इसका तात्पर्य आव्यूह A तथा आव्यूह B एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं। अतः $A^{-1} = B$

इसी तरह यदि हम चाहते हैं A^{-1}, प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा तो हम लिखते हैं

$A = A\,I_n$ ...(iii)

अब (iii) पर प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग जब तक करते हैं जब तक बायाँ पक्ष I_n नहीं हो जाता दायाँ पक्ष (संगत प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग पश्च गुणन (post factor) I_n पर करने के बाद) दायाँ पक्ष इस तरह हो जाता है

$$I_n = AB$$

तब $\quad A^{-1} = B$

इस विधि को निम्न उदाहरण द्वारा समझाया गया है।

उदाहरण 20.23. प्रारम्भिक स्तंभ संक्रियाओं द्वारा आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

हल : $\quad A = A\,I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2 \to C_2 + 3C_1 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_1 \to \frac{1}{2}C_1 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad C_1 \to C_1 - \frac{1}{2}C_2 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow I_2 = AB, \text{ जहाँ } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{अतः } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 20.24. प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं द्वारा आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

हल : $A = I_2A \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}A$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}A \quad R_1 \to \frac{1}{10}R_1 \text{ निरूपित करने पर}$$

$R_2 \to R_2 + 5\,R_1$ निरूपित करने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}A$$

जैसा कि आव्यूह के बायें पक्ष में एक पंक्ति के सभी अवयव '0' हैं। अतः इस आव्यूह का व्युत्क्रम नहीं हो सकता, क्योंकि बायें पक्ष के आव्यूह को तत्समक आव्यूह में नहीं बदला जा सकता।

टिप्पणी: क्योंकि $|A| = 0$, आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है।

उदाहरण 20.25. प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

हल : $A = IA$ या $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A, \quad R_1 \to R_1 - R_2 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} A, \quad R_2 \to R_2 - 2R_1,\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} A, \quad R_2 \to \tfrac{1}{2}R_2 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix} A, \quad R_1 \to R_1 + R_2,\ R_3 \to R_3 + 2R_2 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} A, \quad R_3 \to \tfrac{1}{4}R_3 \text{ निरूपित करने पर}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} A, \quad R_1 \to R_1 + \tfrac{1}{2}R_3,\ R_2 \to R_2 - \tfrac{1}{2}R_3 \text{ निरूपित करने पर}$$

अतः $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{5}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.6

1. निम्नलिखित आव्यूहों का प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

आइये दोहराएँ

- पंक्तियों तथा स्तंभों के रूप में व्यवस्थित संख्याओं के एक आयताकार विन्यास को आव्यूह कहा जाता है। प्रत्येक संख्या को आव्यूह का एक अवयव कहा जाता है।
- एक 'm' पंक्तियों तथा 'n' स्तंभों वाले आव्यूह का क्रम $m \times n$ होता है।
- यदि किसी आव्यूह की पंक्तियों की संख्या उसके स्तंभों की संख्या के बराबर हो, तो उसे वर्ग आव्यूह कहा जाता है।
- एक विकर्ण आव्यूह ऐसा वर्ग आव्यूह होता है जिस में विकर्ण के अवयवों को छोड़ कर शेष सभी अवयव शून्य होते हैं।
- किसी भी क्रम का एक इकाई आव्यूह उसी क्रम का एक विकर्ण आव्यूह होता है जिसमें प्रत्येक विकर्ण का अवयव 1 होता है।
- शून्य आव्यूह एक ऐसा आव्यूह होता है जिसके सभी अवयव शून्य होते हैं।
- दो आव्यूहों को समान आव्यूह, कहा जाता है यदि उनका क्रम एक ही हो तथा उनके संगत अवयव बराबर हों।
- किसी आव्यूह का परिवर्त उसकी पंक्तियों तथा इसके स्तंभों को परस्पर बदलने से प्राप्त होता है।
- एक आव्यूह A को सममित आव्यूह कहते हैं यदि $A' = A$ हो, तथा इसे विषम सममित कहते हैं यदि $A' = -A$ हो।
- किसी आव्यूह की अदिश से गुणा, उसके प्रत्येक अवयव को अदिश से गुणा करके प्राप्त की जाती है।
- दो आव्यूहों (एक ही क्रम वाले) का योग उनके संगत अवयवों को जोड़ने से प्राप्त आव्यूह होता है।
- दो आव्यूहों A तथा B का अन्तर आव्यूह A तथा आव्यूह B के ऋणात्मक आव्यूह के योगफल के बराबर होता है।
- दो आव्यूहों, $m \times n$ क्रम के आव्यूह A तथा $n \times p$ क्रम के आव्यूह B को गुणनफल $m \times p$, क्रम वाला एक ऐसा आव्यूह होगा जिसके अवयवों को A की पंक्तियों के अवयवों को B के स्तंभों के संगत अवयवों से गुणा करके जोड़ने पर प्राप्त किया जाता है।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi?c=sys*
- *https://www.youtube.com/watch?v=lsOsce_7gK8*
- *https://www.youtube.com/watch?v=lYEdR8-u9qo*
- *https://www.youtube.com/watch?v=sX6iWfQhM4w*
- *https://www.youtube.com/watch?v=slgM3nAEozM*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित क्रम वाले आव्यूहों में से प्रत्येक के अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए:

   (a) 2×1 (b) 3×2 (c) 3×3 (d) 3×4

2. एक 3×2 क्रम वाले आव्यूह का निर्माण कीजिए जिसके अवयव a_{ij} निम्नलिखित रूप में दिये गये हैं:

   (a) $a_{ij} = i - 2j$ (b) $a_{ij} = 3i - j$ (c) $a_{ij} = i + \frac{3}{2} j$

3. आव्यूह का क्रम क्या है?

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

   (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

4. x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए, यदि

   (a) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x+y & z \\ 6 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} x-2 & 3 \\ 0 & y+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ y+z & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} x+y & y-z \\ z-2x & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो ज्ञात कीजिए:

   (a) A+B (b) 2A (c) 2A−B

6. आव्यूह X ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. a तथा b के मान ज्ञात कीजिए जिससे

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-b & 2 & -2 \\ 4 & a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 2a+b & 5 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी

8. आव्यूहों $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 2\\5 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\\3 & 7\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}$

 के लिए सत्यापित कीजिए कि $A+(B+C)=(A+B)+C$

9. यदि $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\2 & 3 & 5\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\\6 & 5\end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या

 AB = BA है?

10. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}0 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। क्या

 AB = BA है?

11. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -3 & -4\end{bmatrix}$ हो, तो A^2 ज्ञात कीजिए।

12. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\4 & 0 & -3\end{bmatrix}$ हो, तो

 A (B+C) ज्ञात कीजिए।

13. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}x & 1\\y & -1\end{bmatrix}$ हो, तो

 तथा $(A+B)^2=A^2+B^2$ हो, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

14. दिखाइए कि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}-8 & 5\\2 & 4\end{bmatrix}$

 समीकरण $A^2+4A-2I=O$ को सन्तुष्ट करता है।

Find intverse of the following matrces using elementary transformations:

15. $\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$ 16. $\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$ 17. $\begin{bmatrix}3 & 10\\2 & 7\end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix}-3 & 5\\2 & 4\end{bmatrix}$ 19. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\5 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 21. $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\2 & 4 & 1\\3 & 7 & 2\end{bmatrix}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 20.1

1. $\begin{bmatrix} 56 & 65 & 71 \\ 29 & 37 & 57 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 56 & 29 \\ 65 & 37 \\ 71 & 57 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 40 & 35 & 25 \\ 10 & 5 & 8 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 40 & 10 \\ 35 & 5 \\ 25 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

4. (a) 6 (b) 12 (c) 8 (d) 12 (e) ab (f) mn

5. (a) $1 \times 8; 2 \times 4; 4 \times 2; 8 \times 1$ (b) $1 \times 5; 5 \times 1$
   (c) $1 \times 12; 2 \times 6; 3 \times 4; 4 \times 3; 6 \times 2; 12 \times 1$
   (d) $1 \times 16; 2 \times 8; 4 \times 4; 8 \times 2; 16 \times 1$

6. (a) 4 (b) 5 (c) 4×5 (d) 20
   (e) $a_{14} = 0; a_{23} = 7; a_{34} = -3; a_{45} = 1$ तथा $a_{33} = 3$

7. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 9 & \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} & \frac{49}{2} \\ 8 & 18 & 32 \\ \frac{25}{2} & \frac{49}{2} & \frac{81}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \\ 15 & 30 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.2

1. (a) G (b) B (c) A, D, E तथा F (d) A, D तथा F
   (e) D तथा F (f) F (g) C

2. (a) $a = 2,\quad b = 10,\quad c = 6,\quad d = -2$
   (b) $a = 2,\quad b = 3,\quad c = 2,\quad d = 5$
   (c) $a = \frac{3}{2}, b = -2,\ c = 2,\ d = -4$

3. नहीं 4. नहीं

देखें आपने कितना सीखा 20.3

1. (a) $\begin{bmatrix} 28 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-21}{2} & -3 \\ -3 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -9 & -3 & -12 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -28 & -14 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 20 & -10 & 0 \\ -5 & 0 & 25 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -12 & 0 & -4 \\ -16 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & -20 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.4

1. (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 19 & 10 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 \\ -9 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} -4 & -11 & -15 \\ 11 & -10 & -10 \end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \\ -2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -14 & 9 \\ 14 & 9 & 8 \\ 16 & 15 & 14 \end{bmatrix}$ 4. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 18 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 27 & 31 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-17}{5} & \frac{-21}{5} \\ \frac{-27}{5} & \frac{-31}{5} \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

हम देखते हैं कि $(A+B)' = B' + A'$

8. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -16 & -3 \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 20.5

1. $AB = [-6]$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $AB \neq BA$

2. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -3 & 13 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$, $AB \neq BA$

3. $AB = \begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{bmatrix}$; BA का अस्तित्व नहीं है।

4. $BA = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$; AB का अस्तित्व नहीं है।

5. दोनों AB तथा BA के अस्तित्व नहीं हैं। AB का अस्तित्व इसलिए नहीं है क्योंकि A के स्तंभों की संख्सा B की पंक्तियों की संख्या के बराबर नहीं है। BA का अस्तित्व इसलिए नहीं है क्योंकि B के स्तंभों की संख्या A की पंक्तियों की संख्या के बराबर नहीं हैं।

6. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$; $AB \neq BA$

7. $AB = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 17 & 24 \\ 14 & -13 & 17 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 16 & -8 & -11 \\ 16 & 11 & 3 \\ 10 & 21 & 11 \end{bmatrix}; AB \neq BA.$

8. $AB = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; AB \neq BA.$

9. (a) $x = 3, \; y = -1$ (b) $x = -1, \; y = 2$

12. (a) $\begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$; AC= BC

यहां, $A \neq B$ तथा $C \neq O$, फिर भी $AC = BC$

अर्थात् उभयनिष्ठ शून्येतर गुणनखंड को समीकरण के दोनों पक्षों से काट देने का नियम आव्यूहों में लागू नहीं होता।

14. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$

हम देखते हैं कि $A(B + C) = AB + AC$

16. $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ 18. (a) नहीं (b) नहीं (c) नहीं

टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 20.6

1. (a) $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{23}\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (c) does not exist

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

आइए अभ्यास करें

1. (a) 2 (b) 6 (c) 9 (d) 12

2. (a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 \\ \frac{7}{2} & 5 \\ \frac{9}{2} & 6 \end{bmatrix}$

3. (a) 3×1 (b) 1×3 (c) 3×2 (d) 2×3

4. (a) $x = 1, y = 2, z = 3$ (b) $x = 5, y = 1, z = 5$ (c) $x = 3, y = -3\ z = 3$
   (d) $x = 2, y = 1, z = 5$

5. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. $a = \frac{3}{2}$ $b = -\frac{3}{2}$

9. $AB = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 38 & 43 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 17 \\ 6 & 14 & 24 \\ 4 & 21 & 37 \end{bmatrix}; AB \neq BA$

10. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; AB = BA$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

13. $x = 1, y = -4.$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

18. $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

21

सारणिक तथा इसके अनुप्रयोग

प्रत्येक वर्ग आव्यूह एक अद्वितीय संख्या से सम्बन्धित है–यह संख्या सारणिक कहलाती है। इस पाठ में हम सारणिक के भिन्न–भिन्न गुणों (गुणधर्मों) का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाऐंगे :

- एक वर्ग आव्यूह के सारणिक को परिभाषित करना
- एक आव्यूह के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखंड परिभाषित करना
- आव्यूह के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखंड ज्ञात करना
- सारणिकों के गुण लिखना
- अधिक–से–अधिक 3 क्रम वाले सारणिकों के मान ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- समीकरणों के हल का ज्ञान
- संख्या निकाय (सम्मिश्र संख्याओं सहित) का ज्ञान
- संख्याओं और व्यंजकों पर चार मौलिक संक्रियाएँ

21.1 कोटि (क्रम) 2 के सारणिक

आइए नीचे दिये गये रैखिक समीकरण निकाय पर विचार करें :

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

इस समीकरण निकाय को x तथा y के लिए हल करने पर,

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ तथा } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ जबकि } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

संख्या $a_1b_2 - a_2b_1$ यह ज्ञात करती है कि x तथा y के मान हैं या नहीं

संख्या $a_1b_2 - a_2b_1$ सारणिक का मान कहलाता है तथा इसे हम

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \text{ द्वारा दर्शाते हैं।}$$

21.2 कोटि 2 के सारणिक का विस्तार

क्रम 2 के सारणिक को विस्तृत रूप में लिखने का नियम नीचे दिया गया है :

सारणिक, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, जिसमें a_{11} प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव है,

a_{12} प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय स्तम्भ का अवयव है,

a_{21} द्वितीय पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव है,

a_{22} द्वितीय पंक्ति तथा द्वितीय स्तम्भ का अवयव है

के अवयवों को निम्न प्रकार से लिखिए :

$$\begin{matrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{matrix}$$

तीर के निशान द्वारा जुड़े अवयवों को गुणा कीजिए। जो तीर का निशान नीचे की ओर जाता है जैसे $a_{11}\, a_{22}$ वह धनात्मक होगा तथा जिस गुणनफल में तीर का निशान ऊपर की ओर जाता है वह ऋणात्मक होगा जैसे कि $-\,a_{21}\, a_{12}$ ।

इन दोनों गुणनफलों का योग अर्थात् $a_{11}\, a_{22} + (-\,a_{21}.a_{12})$ या $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$ दिए गए सारणिक का वांछित मान है।

उदाहरण 21.1. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 \\ x^2-x+1 & x-1 \end{vmatrix}$

हल:

(i) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (6 \times 2) - (8 \times 4) = 12 - 32 = -20$

(ii) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\,(a+b) - (2a)\,(2b)$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

(iii) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 \\ x^2-x+1 & x-1 \end{vmatrix} = (x^2+x+1)(x-1) - (x^2-x+1)(x+1)$

$= (x^3-1)-(x^3+1) = -2$

उदाहरण 21.2. x का मान ज्ञात कीजिए यदि :

(i) $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 6$ हो। (ii) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0$ हो।

हल :

(i) $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-3)(x+3) - x(x+1) = (x^2-9) - x^2 - x = -x-9$

प्रश्न के अनुसार, $-x-9=6 \Rightarrow x=-15$

(ii) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x-1)(4x+2)-(x+1)(2x+1)$

$= 8x^2+4x-4x-2-2x^2-x-2x-1$

$= 6x^2-3x-3 = 3(2x^2-x-1)$

प्रश्न के अनुसार, $3(2x^2-x-1)=0$

या, $2x^2-x-1=0$ या, $2x^2-2x+x-1=0$

या, $2x(x-1)+1(x-1)=0$ या, $(2x+1)(x-1)=0$

या, $x=1,-\frac{1}{2}$

21.3 कोटि 3 का सारणिक

व्यंजक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ में 9 राशियाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ तथा c_3 हैं जिन्हें 3 पंक्तियों तथा 3 स्तम्भों में व्यवस्थित किया गया है। कोटि 3 के सारणिक में $(3)^2 = 9$ अवयव हैं।

कोटि 3 के सारणिक को दोहरे पादांकों का प्रयोग करते हुए हम इस प्रकार लिखते हैं :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

एक सारणिक को प्रायः हम Δ या |A|, |B| इत्यादि द्वारा दर्शाते हैं।

$\Delta = |a_{ij}|$ जबकि $i = 1, 2, 3,$ तथा $j = 1, 2, 3$ है।

21.4 एक वर्ग आव्यूह का सारणिक

प्रत्येक वर्ग आव्यूह के लिए हम एक संगत सारणिक को सम्बद्ध करते हैं।

1×1 आव्यूह $[a]$, के लिए हम कोटि 1 के सारणिक, जिसमें केवल एक अवयव a होता है, को सम्बद्ध करते हैं। इस सारणिक का मान a है।

यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ कोई कोटि 2 का आव्यूह है, तो व्यंजक $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ कोटि 2 का सारणिक कहलाता है। इसे हम

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$ द्वारा दर्शाते हैं।

3×3 आव्यूह $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, के साथ हम सारणिक $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ को सम्बद्ध करते हैं

तथा इसका मान है

$$a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)\, a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

उदाहरण 21.3. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो $|A|$ ज्ञात कीजिए।

हल : $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 6 = 15 - 6 = 9$

उदाहरण 21.4. यदि $A = \begin{bmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{bmatrix}$ हो, तो $|A|$ ज्ञात कीजिए।

हल : $|A| = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{vmatrix} = (a + b)\,(a - b) - b \times a = a^2 - b^2 - ab$

टिप्पणी: 1. एकांक आव्यूह I का सारणिक 1 होता है।

2. एक वर्ग आव्यूह जिसका सारणिक शून्य होता है, अव्युत्क्रमणीय (Singular) आव्यूह कहलाता है।

21.5 कोटि 3 के सारणिक का मान

खण्ड 21.4 में हमने लिखा है कि

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

जिस का आगे इस प्रकार विस्तार किया जा सकता है :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

हम देखते हैं कि विस्तार की उपरोक्त विधि में, हम प्रथम पंक्ति के प्रत्येक अवयव को, कोटि 2 के उस सारणिक से गुणा करते हैं जो उस पंक्ति तथा स्तम्भ को हटाने पर प्राप्त होता है जिसमें वह अवयव है।

ध्यान दीजिए कि अवयव a_{11}, a_{12}, a_{13} को क्रमशः धनात्मक, ऋणात्मक तथा धनात्मक चिह्न दिए गए हैं। दूसरे शब्दों में उन्हें धनात्मक चिह्न से आरम्भ कर एकान्तरतः धनात्मक तथा ऋणात्मक चिह्न देते हैं। यदि अवयव के पादांकों का योग समसंख्या हो, तो हम धनात्मक चिह्न लगाते हैं तथा यदि विषम संख्या हो, तो हम ऋणात्मक चिह्न लगाते हैं। इसलिए a_{11} को धनात्मक चिह्न दिया गया है।

टिप्पणी: हम सारणिक का विस्तार उसकी किसी भी पंक्ति या स्तम्भ द्वारा कर सकते हैं। सारणिक का वही मान होगा चाहे हम उसका विस्तार प्रथम पंक्ति या प्रथम स्तम्भ अथवा किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ द्वारा करें। हमें केवल यह ध्यान रखना है कि ऊपर दिए गए नियम के अनुसार चिह्न लगाने हैं।

उदाहरण 21.5. निम्न सारणिक का विस्तार प्रथम पंक्ति के प्रयोग द्वारा कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 1 \times (20 - 2) - 2 \times (10 - 3) + 3 \times (4 - 12) = 18 - 14 - 24 = -20$$

उदाहरण 21.6. निम्न सारणिक का विस्तार दूसरे स्तम्भ के प्रयोग द्वारा कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

हल: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= -2 \times (3 - 4) + 1 \times (1 - 6) - 3 \times (2 - 9)$$

$$= 2 - 5 + 21$$

$$= 18$$

देखें आपने कितना सीखा 21.1

1. |A| ज्ञात कीजिए यदि

(a) $A = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 5 \\ 2 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha+\cos\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}$

2. ज्ञात कीजिए कि निम्न में से कौन–कौन से आव्यूह अव्युत्क्रमणीय हैं :

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. निम्न में से प्रत्येक सारणिक का प्रथम पंक्ति से विस्तार कीजिए :

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

21.6 उपसारणिक तथा सहखण्ड

21.6.1 |A| में अवयव a_{ij} का उपसारणिक

किसी सारणिक के प्रत्येक अवयव के संगत एक संख्या होती है जिसे उस अवयव का उपसारणिक कहते हैं। किसी सारणिक का **उपसारणिक** वह संख्या है जो उस अवयव की पंक्ति तथा स्तम्भ को छोड़ने पर (जिसमें वह अवयव आता है) शेष सारणिक का मान होता है इस प्रकार |A| में किसी अवयव a_{ij} का उपसारणिक उस सारणिक का वह मान है जो उसकी iवीं पंक्ति तथा jवें स्तम्भ को हटाकर प्राप्त होता है। aij के उपसारणिक को M_{ij}. द्वारा निरूपित किया जाता है। उदाहरणार्थ सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ में 3 का उपसारणिक 7 है।

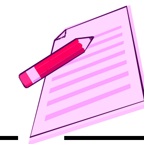
उदाहरण 21.7. निम्नलिखित सारणिक के अवयवों के उपसारणिक ज्ञात कीजिए :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

हल : मान लीजिए कि a_{ij} का उपसारणिक M_{ij}. द्वारा निरूपित होता है। अब a_{11} प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ का अवयव है। अतः a_{11} का उपसारणिक ज्ञात करने के लिए हमें |A| की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ को छोड़ना होगा।

a_{11} के उपसारणिक M_{11} का मान नीचे दिया गया है:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$



इसी प्रकार a_{12} के उपसारणिक M_{12} का मान है :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \text{ ; इसी प्रकार, } M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} \text{ ; } \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

इसी प्रकार हम M_{31}, M_{32} तथा M_{33} ज्ञात कर सकते हैं।

21.6.2 |A| में a_{ij} के सहखण्ड

|A| के किसी अवयव a_{ij} का सहखण्ड, इसके उपसारणिक M_{ij} को $(-1)^{i+j}$ द्वारा गुणा करने पर प्राप्त होता है। इसे प्रायः C_{ij} द्वारा व्यक्त किया जाता है।

अतः a_{ij} का सहखण्ड $= C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

उदाहरण 21.8. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ में अवयवों a_{11}, a_{12} तथा a_{21} के सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : किसी अवयव a_{ij} का सहखण्ड $(-1)^{i+j} M_{ij}$ होता है।

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) = (a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23})$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -(a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23}) = (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33})$$

तथा $$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = (a_{32}\, a_{13} - a_{12}\, a_{33})$$

उदाहरण 21.9. नीचे दिये गए सारणिक में, दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड ज्ञात कीजिए:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

हलः दूसरी पंक्ति के अवयव हैं : $a_{21}=5$; $a_{22}=2$; $a_{23}=4$.

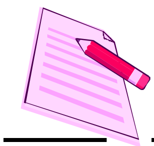
a_{21} अर्थात् 5 का उपसारणिक $M_{21} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 0 = 48$

a_{22} अर्थात् 2 का उपसारणिक $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$

तथा a_{23} अर्थात् 4 का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 42 = -42$ संगत सहखण्ड हैं :

$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -(48) = -48$ $\qquad$ $C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = +(-13) = -13$

तथा $C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -(-42) = 42$



देखें आपने कितना सीखा 21.2

1. सारणिक की दूसरी पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

2. सारणिक के तीसरे स्तम्भ के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. सहखण्डों के उपयोग द्वारा निम्न में से प्रत्येक सारणिक का मान ज्ञात कीजिए:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

4. निम्नलिखित समीकरणों को x के लिये हल कीजिए :

(a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

21.7 सारणिक के गुण

अब हम सारणिक के गुणों की चर्चा करेंगे। ये गुण सारणिक का मान ज्ञात करने में उपयोगी सिद्ध होते हैं।

गुण 1 : किसी सारणिक की पंक्तियों तथा स्तम्भों को परस्पर बदलने देने से सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।

मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

प्रथम स्तम्भ से सारणिक का विस्तार करने पर हम प्राप्त करते है:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(3-0) - 0\,(1-6) + 4\,(0+9) = 6 + 36 = 42$$

मान लीजिए कि Δ' वह सारणिक है जो Δ की पंक्तियों तथा स्तम्भों को परस्पर परिवर्तित करने से प्राप्त होता है। तब

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

ध्यान दीजिए कि किसी सारणिक का विस्तारित रूप किसी भी पंक्ति या स्तम्भ का उपयोग करके हल किया जा सकता है।

अतः Δ' का स्तम्भ 2 अर्थात C_2 द्वारा विस्तार करने पर

$$(-)\ 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-)\ 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + (-3)\ (-2-12) + 0 = 42$$

अतः हम पाते हैं कि $\Delta = \Delta'$

गुण 2 : यदि किसी सारणिक की दो संलग्न पंक्तियों या दो संलग्न स्तम्भों को परस्पर बदल दें, तो सारणिक के मान का चिह्न बदल जाता है परन्तु उसका वास्तविक मान नहीं बदलता।

मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

सारणिक का प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\ (4-3) - 3\ (2-9) + 1\ (1-6) = 2 + 21 - 5 = 18$$

माना C_1 तथा C_2 को परस्पर बदलने पर सारणिक Δ' प्राप्त होता है

$$\text{तब, } \Delta' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

सारणिक Δ' का विस्तार प्रथम पंक्ति से करने पर,

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\ (2-9) - 2(4-3) + 1(6-1) = -21 - 2 + 5 = -18$$

अतः हम देखते हैं कि $\Delta' = -\Delta$

उपप्रमेय यदि किसी सारणिक में कोई पंक्ति (या स्तम्भ) उस सारणिक की n पंक्तियों (या स्तम्भों) को पार करता है तो परिणामी सारणिक Δ' का मान $\Delta' = (-1)^n\,\Delta$ होगा।

उदाहरणार्थ

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\ (10-24) - 3\ (2-0) + 5(4)$$

$$= -28 - 6 + 20 = -14$$

गुण 3 : यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ (या स्तम्भ) समान हों, तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ एक दिया गया सारणिक है।

आइए प्रथम और दूसरे स्तम्भ को परस्पर बदल कर एक नया सारणिक Δ' प्राप्त करें

$$\therefore \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

परन्तु प्रमेय–2 द्वारा सारणिक का चिह्न बदल जाता है यदि उसकी दो संलग्न पंक्तियों (या स्तम्भों) को परस्पर बदल दिया जाए।

$$\therefore \Delta' = -\Delta$$

इस प्रकार हम देखते है कि $\Delta = -\Delta$

या $\quad 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

अतः यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ (या स्तम्भ) समान हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

गुण 4 : किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव को यदि किसी स्थिरांक $k \neq 0$ से गुणा किया जाए तो सारणिक का मान k गुणा हो जाता है।

माना $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

पहली पंक्ति द्वारा विस्तार करने पर,

$$\Delta = 2(3-0) - 1\,(0-0) + (-5)\,(0+12) = 6 - 60 = -54$$

अब हम तीसरे स्तम्भ को 4 से गुणा करते हैं। माना नया सारणिक Δ' है।

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -20 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

Δ' का प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर,

$$\Delta' = 2\,(12-0) - 1\,(0-0) + (-20)\,(0+12)$$
$$= 24 - 240 = -216 = 4 \times (-54) = 4\,\Delta$$

उपप्रमेय: यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियां (या स्तम्भ) समानुपाती हों, तो उस का मान शून्य होता है।

उपपत्ति माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 \end{vmatrix}$

यहां पर तीसरे स्तम्भ के अवयव पहले स्तम्भ के संगत अवयवों का k गुना हैं

गुण 4 द्वारा, $\Delta = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$

$= k \times 0$ (गुण 3 द्वारा)

$= 0$

गुण 5 : यदि किसी सारणिक की कोई पंक्ति या स्तम्भ दो या अधिक पदों के रूप में हो तो उस सारणिक को उसी कोटि के दो या अधिक सारणिकों के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

उपपत्तिः माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1+\alpha & b_1+\beta & c_1+\gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तो प्रथम पंक्ति से विस्तृत करने पर

$$\Delta = (a_1+\alpha)(b_2c_3-b_3c_2)-(b_1+\beta)(a_2c_3-a_3c_2)+(c_1+\gamma)(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)+\alpha(b_2c_3-b_3c_2)$$

$$-\beta(a_2c_3-a_3c_2)+\gamma(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

अतः सारणिक Δ को उसी कोटि के दो सारणिकों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

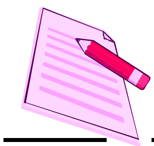
गुण 6 : यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में किसी दूसरी पंक्ति (या स्तम्भ) के संगत अवयव का k गुणा जोड़ दिया जाय तो सारणिक का मान नहीं बदलता।

उपपत्ति मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

R_1 के प्रत्येक अवयव में, R_3 का k गुणा संगत अवयव जोड़ने पर अर्थात $R_1 \to R_1 + kR_3$

मान लीजिए कि $\Delta' = \begin{vmatrix} a_1+ka_3 & b_1+kb_3 & c_1+kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

तब $\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_3 & kb_3 & kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$



या
$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

या $\Delta' = \Delta + k \times 0$ (क्योंकि पंक्ति 1 और पंक्ति 3 समान हैं।)

$\therefore$ $\Delta' = \Delta$

21.8 गुणों के प्रयोग द्वारा सारणिक का मान

अब हम उपर्युक्त गुणों के प्रयोग से एक सारिणक का सुविधा पूर्वक मान ज्ञात करने की स्थिति में हैं। किसी सारणिक को सरलतम रूप में लाने का अभिप्राय किसी पंक्ति (या स्तम्भ) में उपरोक्त प्रमेयों का उपयोग करके अधिक से अधिक अवयवों को शून्य बनाने से है। फिर उस पंक्ति (या स्तम्भ) द्वारा सारणिक का विस्तार करते हैं। हम सांकेतिक भाषा में प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय पंक्ति को R_1, R_2, तथा R_3 से तथा स्तम्भों को C_1, C_2 तथा C_3 से निरूपित करते हैं।

उदाहरण 21.10. दर्शाइये कि $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$ जबकि w संख्या 1 का अवास्तविक घनमूल है।

हल : मान लीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$

प्रथम स्तम्भ के अवयवों में दूसरे तथा तीसरे स्तम्भों के अवयवों का योग, करने पर अर्थात् क्रिया $C_1 \to C_1 + (C_2 + C_3)$ करने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega+\omega^2+1 & \omega^2 & 1 \\ \omega^2+1+\omega & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0 \qquad (\because\ 1+w+w^2 = 0)$$

उदाहरण 21.11. दर्शाइये कि $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$

हल: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-c & bc-ab \\ 0 & b-c & ca-ab \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ $[R_1 \to R_1 - R_3$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3]$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-c & b(c-a) \\ 0 & b-c & a(c-b) \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

C_1 द्वारा विस्तार करने पर

$$\Delta = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -a \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

उदाहरण 21.12. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4\,abc$

हल: $$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)]$$

R_1 द्वारा विस्तार करने पर

$$= 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - 2b\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2c\,[b(a+b) - bc] - 2b[bc - c(c+a)]$$

$$= 2bc\,[a+b-c] - 2bc[b-c-a]$$

$$= 2bc\,[(a+b-c) - (b-c-a)]$$

$$= 2bc\,[a+b-c-b+c+a] = 4abc$$

उदाहरण 21.13. मान ज्ञात कीजिए: $\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

हल : $$\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$$

$= 0,$ (C_1 द्वारा विस्तार करने पर)

उदाहरण 21.14. सिद्ध कीजिए कि: $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

हल: $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & bc & bc+ab+ac \\ 1 & ca & ca+bc+ba \\ 1 & ab & ab+ca+cb \end{vmatrix} \quad [C_3 \to C_2 + C_3]$$

$$= (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (ab+bc+ca) \times 0 \qquad \text{(गुण 3 द्वारा)}$$

$$= 0$$

उदाहरण 21.15. दर्शाइये कि $\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ 0 & 0 & 2c \\ 0 & 2b & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{bmatrix}$$

$$= abc(-a)\begin{vmatrix} 0 & 2c \\ 2b & 0 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \text{ द्वारा विस्तार करने पर})$$

$$= abc(-a)(-4bc)$$

$$= 4a^2b^2c^2$$

उदाहरण 21.16. दर्शाइये कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2\,(a+3)$

हल : $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 \\ a+3 & 1+a & 1 \\ a+3 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \quad [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{bmatrix}$$

$$= (a+3) \times (1)\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)(a^2)$$

$$= a^2(a+3)$$

देखें आपने कितना सीखा 21.3

1. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} x+3 & x & x \\ x & x+3 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 27\,(x+1)$

2. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

3. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = bc+ca+ab+abc$

4. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix} = 9b^2\,(a+b)$

5. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} (a+1)(a+2) & a+2 & 1 \\ (a+2)(a+3) & a+3 & 1 \\ (a+3)(a+4) & a+4 & 1 \end{vmatrix} = -2$

6. दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+\mathrm{a} & a+b \\ c+a & a+b & b+\mathrm{c} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

7. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

8. x के लिये हल कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & x \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

21.11 सारणिक के अनुप्रयोग

सारणिक को त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये प्रयोग किया जाता है।

21.11.1 त्रिभुज का क्षेत्रफल

हम जानते हैं एक ऐसे त्रिभुज ABC जिसके शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हो, का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \qquad ...(i)$$

तथा, $$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)$$ [स्तंभ C_1 के साथ प्रसार का करने पर]

$$= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \qquad ...(ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

अतः किसी त्रिभुज, जिसके शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हों, तो उसका क्षेत्रफल

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

21.11.2 तीन बिन्दुओं का संरेख प्रतिबन्ध

माना $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ तीन बिन्दु हैं। तब

A, B, C संरेख होंगे जब, ΔABC का क्षेत्रफल शून्य हो

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

21.11.3 दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण

माना दो बिन्दु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ और $R(x, y)$ P तथा Q को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित हैं। तब P, Q तथा R संरेख होंगे

$$\therefore \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

अतः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कर सकते हैं,

$$\text{इस प्रकार} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरण 21.17. ΔPQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि इसके शीर्ष P(5, 4), Q(–2, 4) तथा R(2, –6) हैं।

हल : माना A, त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल है

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[5(4-(-6))-4(-2-2)+1(12-8)]$$

$$= \frac{1}{2}[50+16+4] = \frac{1}{2}(70) = 35 \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 21.18. दर्शाइए कि बिन्दु (a, b + c), (b, c + a) तथा (c, a + b) संरेख हैं।

हल: $$\Delta = \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b+c & 1 \\ b & b+c+a & 1 \\ c & c+a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a + b + c) \times 0 = 0$$

अतः दिये गये बिन्दु संरेख हैं।

उदाहरण 21.19. सारणिकों का प्रयोग करते हुए, A(1, 3) तथा B(2, 1) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना P(x, y) इन दोनों बिन्दुओं A(1, 3) तथा B(2, 1) को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित है। तब

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(3-1) - y(1-2) + 1(1-6) = 0 \Rightarrow \quad 2x + y - 5 = 0$$

यह AB का समीकरण है।

देखें आपने कितना सीखा 21.4

1. ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ इसके शीर्ष A (3, 8), B (–4, 2) तथा (5, –1) हैं।
2. दर्शाइए कि बिन्दु A(5, 5), B(–5, 1) तथा C(10, 7) संरेख है।
3. सारणिकों का प्रयोग करते हुए, बिन्दु (1, 2) तथा (3, 6) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- व्यंजक $a_1b_2 - a_2b_1$ को $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।
- प्रत्येक वर्ग आव्यूह के साथ आव्यूह के एक सारणिक को सम्बद्ध किया जा सकता है।

- किसी एक सारणिक में एक अवयव का उपसारणिक, दिए गए सारणिक से अवयव वाले स्तम्भ तथा पंक्ति को हटा कर प्राप्त किया जाता है।
- सारणिक में अवयव a_{ij} का सहखण्ड, a_{ij} के उपसारणिक को $(-1)^{i+j}$ द्वारा गुणा करके प्राप्त किया जाता है।
- किसी सारणिक का विस्तार किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के द्वारा किया जा सकता है। सारणिक का मान एक ही रहता है।
- एक वर्ग आव्यूह जिसका सारणिक शून्य होता है, *अव्युत्क्रमणीय आव्यूह* कहलाता है।
- यदि किसी एक सारणिक की पंक्तियों तथा स्तम्भों को आपस में बदल दिया जाए तो सारणिक का मान वही रहता है।
- यदि किसी सारणिक की दो आसन्न पंक्तियों (या स्तम्भों) को आपस में बदल दिया जाए, तो सारणिक के मान में चिह्न का ही अन्तर पड़ता है।
- यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ (स्तम्भ) समान हों, तो सारणिक का मान शून्य होता है।
- यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति (स्तम्भ) के अवयवों को एक स्थिरांक से गुणा किया जाए, तो सारणिक का मान भी उस स्थिरांक से गुणा हो जाता है।
- यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियाँ (स्तम्भ) समानुपाती हों, तो इसका मान शून्य होता है।
- यदि किसी सारणिक की कोई पंक्ति या स्तम्भ दो या अधिक पदों के रूप में हो, तो उस सारणिक को उसी कोटि के दो या अधिक सारणिकों के येाग के रूप में लिखा जा सकता है।
- यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में किसी दूसरी पंक्ति (या स्तम्भ) संगत के अवयवों का k गुणा जोड़ दिया जाए, तो सारणिक का मान नहीं बदलता।
- किसी आव्यूह तथा इसके व्युत्क्रम का गुणनफल उसी कोटि का इकाई आव्यूह होता है।
- किसी आव्यूह का व्युत्क्रम एक अद्वितीय आव्यूह होता है।
- आवश्यक नहीं कि सभी आव्यूह व्युत्क्रमणीय हों।
- कोई तीन बिन्दु तभी संरेख होंगे, जब इन बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्राफल शून्य हो।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi?c=det*
- *http://mathworld.wolfram.com/Determinant.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Determinant*
- *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html*
- *https://www.youtube.com/watch?v=kThkOjhbtWY*

आइए अभ्यास करें

1. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ के सभी उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

2. प्रथम स्तम्भ द्वारा सारणिक $\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ का विस्तार करके इसका मान ज्ञात कीजिए।

3. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. x के लिए हल कीजिए यदि $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

5. सारणिकों के गुणों का उपयोग करके दर्शाइये कि :

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & x+y & x^2+y^2 \\ 1 & y+z & y^2+z^2 \\ 1 & z+x & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

6. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^5 \\ \omega^3 & 1 & \omega^4 \\ \omega^5 & \omega^5 & 1 \end{vmatrix}$ जबकि ω संख्या 1 का काल्पनिक घनमूल है।

7. उन त्रिभुज के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनके शीर्ष निम्न बिन्दु हैं :

   (i) (2, 7), (1, 1) तथा (10, 8) (ii) $(-1,-8), (-2,-3)$ तथा $(3,2)$

   (ii) (0, 0) (6, 0) तथा (4, 3) (iv) (1, 4), (2, 3) तथा (–5, –3)

8. सारणिक का प्रयोग करते हुये 'k' का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीनों बिन्दु संरेख हों

   (i) $(k, 2-2k), (-k+1, 2k)$ तथा $(-4-k, 6-2k)$

   (ii) $(k,-2), (5,2)$ तथा $(6,8)$ (iii) $(3,-2), (k,2)$ तथा $(8,8)$ (iv) $(1,-5), (-4,5), (k,7)$

9. सारणिक का प्रयोग हुये, निम्न बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

   (i) (1, 2) तथा (3, 6) (ii) (3, 1) तथा (9, 3)

10. यदि बिन्दु (a, 0), (0, b) तथा (1, 1) संरेख हों, तो सारणिक का प्रयोग करते हुये, दर्शाइए $ab = a + b$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 21.1

1. (a) 11 (b) 1 (c) 0 (d) $(a^2+b^2)-(c^2+d^2)$
2. (a) तथा (d)
3. (a) 18 (b) −54 (c) $adf + 2bce - ae^2 - fb^2 - dc^2$
   (d) $x-1$

देखें आपने कितना सीखा 21.2

1. $M_{21} = 39;\ C_{21} = -39$
   $M_{22} = 3;\ C_{22} = 3$
   $M_{23} = -11;\ C_{23} = 11$
2. $M_{13} = -5;\ C_{13} = -5$
   $M_{23} = -7;\ C_{23} = 7$
   $M_{33} = 1;\ C_{33} = 1$
3. (a) 19 (b) 0 (c) –131 (d) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (e) $4abc$ (f) 0
4. (a) $x = 2$ (b) $x = 2, 3$ (c) $x = 2, -\dfrac{17}{7}$

देखें आपने कितना सीखा 21.3

7. (a) a^3 (b) $2abc(a+b+c)^3$
8. $x = \dfrac{2}{3}, \dfrac{11}{3}, \dfrac{11}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 21.4

1. $\dfrac{75}{2}$ वर्ग इकाई 3. $y = 2x$

आइए अभ्यास करें

1. $M_{11} = -2,\ M_{12} = -1,\ M_{13} = 1,\ M_{21} = -7,\ M_{22} = -5,\ M_{23} = -1,$
   $M_{31} = -8,\ M_{32} = -7,\ M_{33} = -2$
   $C_{11} = -2,\ C_{12} = 1,\ C_{13} = 1,\ C_{21} = 7,\ C_{22} = -5,\ C_{23} = 1,$
   $C_{31} = -8,\ C_{32} = 7,\ C_{33} = -2$
2. 0
3. –31
4. $x = 0,\ x = 1$
6. (a) –8 (b) 0
7. (*i*) $\dfrac{45}{2}$ वर्ग इकाई (*ii*) 5 वर्ग इकाई (*iii*) 9 वर्ग इकाई (*iv*) $\dfrac{15}{2}$ वर्ग इकाई
8. (*i*) $k = -1, \dfrac{1}{2}$ (*ii*) $k = \dfrac{13}{3}$ (*iii*) $k = 5$ (*iv*) $k = -5$
9. (*i*) $y = 2x$ (ii) $x = 3y$

22

आव्यूह का प्रतिलोम तथा इसके अनुप्रयोग

आइए एक उदाहरण लें

दो पेन तथा 5 कॉपियाँ खरीदने के लिए, अभिनव 120 रु. खर्च करता है जबकि शान्तनु, 4 पेन तथा 3 कॉपियों पर 100 रु. खर्च करता है। हम आव्यूह द्वारा, एक पेन तथा 1 कॉपी का मूल्य ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। माना 1 पेन का मूल्य x रु. तथा 1 कॉपी का मूल्य y रु. है। उपरोक्त सूचना को आव्यूह रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$$

इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं : $AX = B$

जबकि $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$

हमारा उद्‌देश्य $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ज्ञात करना है।

X ज्ञात करने के लिए, हमें एक आव्यूह A^{-1} ज्ञात करना है जिससे $X = A^{-1}B$

यह आव्यूह A^{-1}, आव्यूह A का प्रतिलोम कहलाता है। इस अध्याय में हम इस प्रकार के आव्यूह के प्रतिलोम ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे। हम आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण निकाय को हल करना भी सीखेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- आव्यूह के अवयव का उपसारणिक तथा सहखण्ड परिभाषित करना
- एक आव्यूह के अवयव के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कर करना
- एक आव्यूह का सहखण्डज ज्ञात करना
- अव्युत्क्रमणीय तथा व्युत्क्रमणीय आव्यूह की पहचान तथा उन्हें परिभाषित करना
- एक आव्यूह का प्रतिलोम, यदि इसका अस्तित्व है, ज्ञात करना
- रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूह रूप $AX = B$; में प्रदर्शित कर करना तथा
- आव्यूह विधि से रैखिक समीकरण निकाय को हल करना

पूर्व ज्ञान

- सारणिक की धारणा
- आव्यूह का सारणिक
- ऐसे आव्यूह जिनका सारणिक शून्य है
- आव्यूह का परिवर्त
- आव्यूह के अवयव का उपसारणिक तथा सहखण्ड

22.1 एक वर्ग आव्यूह का सारणिक

हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह के साथ एक सारणिक सम्बन्धित है। किसी दिए गए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ इसका सारणिक होगा।

इसे हम $|A|$ द्वारा दर्शाते हैं।

इसी प्रकार आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, का संगत सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} \text{ है।}$$

एक वर्ग आव्यूह A, अव्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि इसका सारणिक शून्य है अर्थात् $|A| = 0$

एक वर्ग आव्यूह A, व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि इसका सारणिक शून्येतर है अर्थात् $|A| \neq 0$

उदाहरण 22.1. ज्ञात कीजिए कि आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है या व्युत्क्रमणीय जबकि

(a) $A=\begin{bmatrix}-6 & -3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$

हल : (a) यहाँ पर $|A|=\begin{vmatrix}-6 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}$

$$=(-6)(2)-(4)(-3)$$
$$=-12+12=0$$

$\therefore$ आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है।

(b) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}$

यहाँ $=1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}$

$$=-7+4-3$$
$$=-6\neq 0$$

$\therefore$ दिया गया आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

उदाहरण 22.2. x का मान ज्ञात कीजिए जिससे दिया गया आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ x & 2 & -3\end{bmatrix}$$

हल : यहाँ पर

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ x & 2 & -3\end{vmatrix}$$
$$=1\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & -3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & 2\\ x & 2\end{vmatrix}$$
$$=1(-6-2)+2(-3-x)+3(2-2x)$$
$$=-8-6-2x+6-6x$$
$$=-8-8x$$

$\therefore$ A अव्युत्क्रमणीय है,

$\therefore \quad |A| = 0$

$|A| = -8 - 8x = 0$

या $\quad x = -1$

अतः x का अभीष्ट मान -1 है।

उदाहरण 22.3. दिया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. दिखाइए कि

$|A| = |A'|$ जबकि A' आव्यूह A के परिवर्त को दर्शाता है।

हल : यहाँ पर $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

अब $\quad |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 6 = -16 \quad \ldots(1)$

तथा $\quad |A'| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 6 = -16 \quad \ldots(2)$

(1) तथा (2) से, $|A| = |A'|$

22.2 वर्ग आव्यूह के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ पर विचार कीजिए।

A की iवीं पंक्ति तथा jवें स्तम्भ को छोड़कर, प्राप्त सारणिक, अवयव a_{ij} का उपसारणिक कहलाता है तथा इसे M_{ij} द्वारा दर्शाते हैं।

अवयव a_{ij} का सहखण्ड C_{ij} इस प्रकार परिभाषित होता है:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

उदाहरणार्थ, $M_{23} = a_{23}$ का उपसारणिक

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

तथा $C_{23} = a_{23}$ का सहखण्ड

$$= (-1)^{2+3} M_{23}$$

$$= (-1)^{5} M_{23}$$

$$= -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

उदाहरण 22.4. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल :

M_{11} (2 का उपसारणिक) $= 3$; $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = 3$

M_{12} (5 का उपसारणिक) $= 6$; $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -6$

M_{21} (6 का उपसारणिक) $= 5$; $C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 M_{21} = -5$

M_{22} (3 का उपसारणिक) $= 2$; $C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 M_{22} = 2$

उदाहरण 22.5. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15+2 = 17;\ C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 17$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6+8 = 14;\ C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -14$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2-20 = -18;\ C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -18$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9-6 = 3;\ C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -3$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-3-24) = -27;\ C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -27$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1-12) = -13;\ C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-6-30) = -36;\ C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -36$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (2-12) = -10;\ C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 10$$

तथा $M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-5-6) = -11;\ C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -11$

देखें आपने कितना सीखा 22.1

1. निम्नलिखित आव्यूहों के सारणिकों के मान ज्ञात कीजिए :

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. ज्ञात कीजिए कि दिये गये आव्यूह व्युत्क्रमणीय है अथवा अव्युत्क्रमणीयः

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$ (b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. निम्न आव्यूह के अवयवों के उप सारणिक ज्ञात कीजिएः

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

4. (a) निम्न आव्यूह A की दूसरी पंक्ति के अवयवों के उपसारणिक ज्ञात कीजिएः

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) निम्न आव्यूह A की तीसरी पंक्ति के अवयवों के उप सारणिक ज्ञात कीजिएः

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

5. निम्न आव्यूह के अवयवों के सहखण्ड ज्ञात कीजिएः

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

6. (a) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ की दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड ज्ञात कीजिएः

(b) निम्न आव्यूह की पहली पंक्ति के अवयवों के सहखण्ड ज्ञात कीजिएः

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ तो सत्यापित कीजिए कि

(a) $|A| = |A'|$ तथा $|B| = |B'|$ (b) $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$

22.3 वर्ग आव्यूह का सहखण्डज

माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ एक आव्यूह है। तब $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

माना अवयव a_{ij} के M_{ij} तथा C_{ij} क्रमशः उपसारणिक और सहखण्ड हैं। तब

$$M_{11} = |7| = 7;\ C_{11} = (-1)^{1+1}\ |7| = 7$$

$$M_{12} = |5| = 5;\ C_{12} = (-1)^{1+2}\ |5| = -5$$

$$M_{21} = |1| = 1;\ C_{21} = (-1)^{2+1}\ |1| = -1$$

$$M_{22} = |2| = 2;\ C_{22} = (-1)^{2+2}\ |2| = 2$$

हम A के प्रत्येक अवयव के स्थान पर इसके सहखण्ड का विस्थापित करते हैं, तो

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

(1) में प्राप्त सहखण्डों के आव्यूह B का परिवर्त है:

$$B' = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \ldots(2)$$

आव्यूह B' आव्यूह A का *सहखण्डज* कहलाता है तथा इसे Adj A द्वारा दर्शाते हैं।

इस प्रकार दिए गए आव्यूह A का सहखण्डज उस आव्यूह का परिवर्त होता है जिसके अवयव दिए गए आव्यूह के अवयवों के संगत सहखण्ड होते हैं।

आव्यूह A से Adj *A* ज्ञात करने के नियम

(a) आव्यूह के प्रत्येक अवयव को उसके सहखण्ड से विस्थापित कीजिए तथा सहखण्डों का आव्यूह प्राप्त कर लीजिए।

(b) (a) में प्राप्त आव्यूह का परिवर्त ज्ञात कर लीजिए।

उदाहरण 22.6. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए।

हल : सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

माना कि A_{ij} अवयव a_{ij} का सहखण्ड है।

$$\therefore \quad A_{11} = (-1)^{1+1}\ (-3) = -3 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\ (5) = -5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\ (2) = -2 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\ (-4) = -4$$

A के प्रत्येक अवयव को उसके सहखण्ड से विस्थापित करने पर, प्राप्त आव्यूह

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \ldots(1)$$

$$\therefore \qquad \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 22.7. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए।

हल :

सारणिक $\quad A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

माना $|A|$ के अवयव A_{ij} का सहखण्ड a_{ij} है।

तब $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4-2) = -6$; $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(3-5) = 2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-6-20) = -26$; $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1-10) = -11$; $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(2+5) = -7$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1-8) = -9$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+6) = -7$

तथा $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$

A के अवयवों के स्थान पर उनके सहखण्डों को लिखने पर प्राप्त सहखण्डों का आव्यूह

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & -26 \\ 3 & -11 & -7 \\ -9 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{अत: Adj } A = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 2 & -11 & -7 \\ -26 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी: यदि n कोटि का वर्ग आव्यूह A है, तो A(Adj A) = (Adj A) A = |A| I_n
जबकि I_n n कोटि का एकांक आव्यूह है।

जाँच :

(1) माना $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

तब $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ या $|A| = 2\times 3-(-1)\times(4) = 10$

यहाँ पर, $A_{11}=3; A_{12}=1; A_{21}=-4$ तथा $A_{22}=2$

$\therefore \quad \text{Adj A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

अब $\text{A (AdjA)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I_2$

(2) पुनः माना $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

तब $|A| = 3(-6-1) -5\,(4-1) + 7\,(2+3) = -1$

यहाँ पर $A_{11} = -7; A_{12}= -3; A_{13}=5$

$A_{21}= -3; A_{22}= -1; A_{23}=2$

$A_{31}=26; A_{32}=11; A_{33}= -19$

$\therefore \quad \text{Adj A} = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

अब $\text{(A) (Adj A)} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I_3$$

तथा $\text{(Adj A) A} = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I_3$$

टिप्पणीः यदि आव्यूह एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है अर्थात् $|A|=0$, तब A (Adj A) = O

देखें आपने कितना सीखा 22.2

1. निम्न आव्यूहों के सहखण्डज ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

2. निम्न आव्यूहों के सहखण्डज ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & -i \\ i & i \end{bmatrix}$

प्रत्येक दशा में स्थापित कीजिए कि $A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\, A = |A| I_2$.

3. सत्यापित कीजिए

$A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\, A = |A|\, I_3$, जबकि आव्यूह A है

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

22.4 आव्यूह का प्रतिलोम

आव्यूह A पर विचार करें $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

यदि सम्भव हो तो हम एक आव्यूह $B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ ज्ञात करेंगे

ताकि $AB = BA = \text{I}$

अर्थात् $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} ax+bu & ay+bv \\ cx+du & cy+dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर प्राप्त होगा।

$$ax + bu = 1, ay + bv = 0$$
$$cx + du = 0, cy + dv = 1$$

$x, y, u, v,$ के लिए इन समीकरणों को हल करने पर प्राप्त होता है।

$$x=\frac{d}{ad-bc}\ ,\ y=\frac{-b}{ad-bc},\ u=\frac{-c}{ad-bc},\ v=\frac{a}{ad-bc}$$

परन्तु शर्त यह है कि $ad-bc\neq 0$, अर्थात् $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

$$\therefore \qquad B=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $\quad B=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

टिप्पणी: हम जाँच करके देख सकते हैं कि $BA = I$ इस प्रकार हमें एक आव्यूह B प्राप्त हुआ

$$B=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}Adj\ A \qquad ...(1)$$

इस प्रकार प्राप्त आव्यूह B को A^{-1} द्वारा लिखते हैं तथा आव्यूह A का यह गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) है।

इस प्रकार यदि एक दिए गए वर्ग आव्यूह A के लिए एक आव्यूह B का अस्तित्व सम्भव है ताकि AB = BA = I, तब B आव्यूह A का गुणात्मक प्रतिलोम कहलाता है।

टिप्पणी: ध्यान दीजिए कि यदि $ad-bc=0$ अर्थात् $|A|=0$ तो (1) के दायें पक्ष का अस्तित्व नहीं है तथा $B(=A^{-1})$ परिभाषित नहीं है। इसी कारण से हम A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह चाहते हैं जिससे A का गुणात्मक प्रतिलोम अस्तित्व में हो जाए। अतः केवल व्युत्क्रमणीय आव्यूह का गुणात्मक प्रतिलोम होता है। B भी व्युत्क्रमणीय है तथा $A=B^{-1}$.

उदाहरण 22.8. आव्यूह A का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

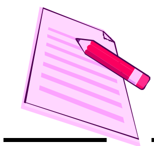
जबकि $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

हल : $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A| = -12-10 = -22\neq 0$

$\therefore \quad A^{-1}$ संभव है।

अब $\quad \text{Adj}\, A=\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$



$$\therefore \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}\, A = \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{22} & \frac{5}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix}$$

टिप्पणी: जाँच करके देखिए कि $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

उदाहरण 22.9. आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए

$$\text{जबकि } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

हल :
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \qquad |A| &= 3(5-24) -2(-5-30) -2(4+5) \\ &= 3(-19) -2(-35) -2(9) \\ &= -57+70-18 \\ &= -5 \neq 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ A^{-1} सम्भव है।

माना A_{ij} आव्यूह A के a_{ij} अवयवों के सहखण्ड हैं।

तब
$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5-24 = -19,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-30) = 35$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4+5 = 9,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(-10+8) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -15+10 = -5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(12-10) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12-2 = 10,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(18+2) = -20$$

और $$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2 = -5$$

$\therefore$ इस प्रकार सहखण्डों का आव्यूह $= \begin{bmatrix} -19 & 35 & 9 \\ 2 & -5 & -2 \\ 10 & -20 & -5 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $\text{Adj}A = \begin{bmatrix} -19 & 2 & 10 \\ 35 & -5 & -20 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj\ A = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -19 & 2 & 10 \\ 35 & -5 & -20 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{5} & \frac{-2}{5} & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ \frac{-9}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

टिप्पणीः जाँच करके देखें कि $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$

उदाहरण 22.10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ हो,

तो ज्ञात कीजिए : (i) $(AB)^{-1}$ (ii) $B^{-1}A^{-1}$ (iii) क्या $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$?

हल : (i) $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0 & 1+0 \\ -4+0 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

अब $$|AB| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -6+4 = -2 \neq 0.$$

$\therefore\ (AB)^{-1}$ सम्भव है।

आइये AB को C से निरूपित करते हैं

माना C_{ij} सरणिक C के अवयव c_{ij} के सहखण्ड हैं

तब $C_{11} = (-1)^{1+1}(3) = 3$ $\qquad C_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}(-4) = 4$ $\qquad C_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$

$$\text{Adj}(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\text{Adj}(C) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) अब $B^{-1}\ A^{-1}$ ज्ञात करने के लिए पहले B^{-1} ज्ञात करेंगे।

अब $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\therefore |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$

$\therefore$ B^{-1} सम्भव है।

माना B_{ij} आव्यूह B के अवयव b_{ij} के सहखण्ड हैं

तब $B_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$ $\qquad B_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$

$B_{12} = (-1)^{1+2}(0) = 0$ तथा $\qquad B_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$

$\therefore$ $\text{Adj } B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad \therefore\ B^{-1} = \frac{1}{|B|}.AdjB = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

तथा $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} सम्भव है।

माना A_{ij} आव्यूह A के अवयव a_{ij} के सहखण्ड है

तब $A_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1}(0) = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$ तथा $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1$

$\therefore$ $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

अब $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} - 1 & 0 + \frac{1}{2} \\ 0 - 2 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) हाँ,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

देखों आपने कितना सीखा 22.3

1. यदि सम्भव हो तो निम्नलिखित आव्यूहों का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. यदि सम्भव हो तो निम्न आव्यूहों के प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

(a) और (b) के लिए जाँच करके देखिए कि $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो $(A')^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

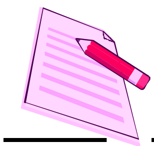
5. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b+c & c-a & b-a \\ c-b & c+a & a-b \\ b-c & a-c & a+b \end{bmatrix}$

हो, तो दर्शाइए कि ABA^{-1} एक विकर्ण आव्यूह है।

6. यदि $\phi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये $\left[\phi(x)\right]^{-1} = \phi(-x)$.

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये कि $A'A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

8. यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \dfrac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये कि $aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)\, I - aA$



9. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये कि $A^{-1} = A^2$

10. यदि $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइये कि $A^{-1} = A'$

22.5 रैखिक समीकरण निकाय का हल

पिछली कक्षाओं में आपने दो या तीन अज्ञात चरों में रैखिक समीकरणों (युगपत समीकरण) को हल करना सीखा है। ऐसे समीकरण निकायों को हल करने के लिए आपने विलोपन विधि का प्रयोग किया था। जब चरों की संख्या अधिक होती है तो विलोपन करना कठिन हो जाता है।

आप एक वैकल्पिक विधि, क्रेमर नियम से ऐसे समीकरण निकायों को हल करना भी पहले ही सीख चुके हैं।

अब हम एक अन्य विधि, जो आव्यूह विधि कहलाती है, की चर्चा करेंगे जो बड़ी संख्या में अज्ञात चरों के समीकरण निकाय को हल करने में प्रयोग की जा सकती है। सुगमता के दृष्टि कोण से, हम दो या तीन चरों में समीकरण निकाय लेंगे।

22.5.1 आव्यूह विधि

इस विधि में, पहले हम समीकरण निकाय को आव्यूह रूप $AX = B$, में व्यक्त करते हैं जबकि A गुणांक आव्यूह कहलाता है।

उदाहरणार्थ, यदि दिया गया समीकरण निकाय है

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

तो इसका आव्यूह रूप है :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

यहाँ पर $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

यदि दिया गया समीकरण निकाय है $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ तो इस का आव्यूह रूप है:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

जबकि $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

हल ज्ञात करने से पहले हम यह जाँच करेंगे कि गुणांक आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है या नहीं।

टिप्पणी: यदि A अव्युत्क्रमणीय है, तब $|A|=0$. और A^{-1} का अस्तित्व नहीं है। इसलिए यह विधि प्रयोग नहीं की जा सकती।

समीकरण $AX=B$ पर विचार कीजिए जबकि $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

जब $|A| \neq 0$, अर्थात् $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ हम समीकरण $AX=B$ को दोनों ओर A^{-1} से गुणा करते हैं।

$$\therefore \quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad IX = A^{-1}B \qquad (\because A^{-1}A = I)$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$\because A^{-1} = \dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$, हम प्राप्त करते हैं:

$$X = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2c_1-b_1c_2 \\ -a_2c_1+a_1c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \\ \dfrac{-a_2c_1+a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \end{bmatrix}$$

अतः $x = \dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ तथा $y = \dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

उदाहरण 22.11. आव्यूह विधि द्वारा रैखिक समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} 4x-3y &= 11 \\ 3x+7y &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(i)}$$

को हल कीजिए।

हल : इस निकाय को आव्यूह रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{...(ii)}$$

यहाँ पर, $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, तथा $B = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$

अतः (ii) बन जाता है

$$AX = B \qquad \text{...(iii)}$$

अब $|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 9 = 37 \neq 0$

क्योंकि $|A| \neq 0$, A^{-1} सम्भव है।

कथन (iii) के दोनों पक्षों को बायीं ओर (A^{-1}) से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

अर्थात् $IX = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B$$

अतः $X = \dfrac{1}{|A|}(Adj\ A)\ B$

या $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} 77-3 \\ -33-4 \end{bmatrix}$

या $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \dfrac{1}{37}\begin{bmatrix} 74 \\ -37 \end{bmatrix}$ या $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ x = 2, y = – 1 दिए गए समीकरण निकाय का शून्येतर, अद्वितीय हल है।

उदाहरण 22.12. आव्यूह विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

हल : दिए गए समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखते हुए,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \text{... (i)}$$

जो कि $AX = B$, के रूप में है, जबकि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = A^{-1}B \qquad \text{...(ii)}$$

यहाँ पर $|A| = 1\,(2-3)\,-2\,(-1-2)\,+3\,(3+4)$

$= 26 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} का सम्भव है।

अब Adj $A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 8 \\ 3 & -7 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ (ii) से हमें प्राप्त हुआ $X = A^{-1}B = \dfrac{1}{|A|} Adj\, A.B$

$$X = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -1 & 11 & 8 \\ 3 & -7 & 2 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 26 \\ 52 \\ 78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{या} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $x = 1$, $y = 2$ तथा $z = 3$ दिए गए समीकरण निकाय का हल है।

22.6 समीकरण निकाय की संगतता का निकष (कसौटी)

माना $AX = B$ दो या तीन रैखिक समीकरणों का एक निकाय है तब हमारे पास निम्न निकष (कसौटी) है :

(1) यदि $|A| \neq 0$, तो समीकरण निकाय संगत है तथा इसका एक अद्वितीय हल है जो हमें $X = A^{-1}B$ से प्राप्त होता है।

(2) यदि $|A| = 0$, तो निकाय संगत या असंगत हो सकता है। यदि निकाय संगत होगा तो इसका एक अद्वितीय हल नहीं होगा। इसके अतिरिक्त यदि

(a) (Adj A) B $\neq$ O, तब निकाय असंगत होगा

(b) (Adj A) B = O, तो निकाय संगत होगा और इसके अनन्त हल होंगे।

टिप्पणी: यह निकष 'n' में 'n' समीकरण निकाय के लिए भी सत्य है।

अब हम उदाहरणों के द्वारा इसे सत्यापित करते हैं।

(a) $5x + 7y = 1$
$2x - 3y = 3$

यह निकाय संगत है तथा इसका एक अद्वितीय हल है क्योंकि $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

यहाँ पर आव्यूह समीकरण है $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

अर्थात् $AX = B$ ... (i)

जबकि $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

यहाँ पर, $|A| = 5 \times (-3) - 2 \times 7 = -15 - 14 = -29 \neq 0$

तथा $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\, A = \frac{1}{-29}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\cdots (ii)$

(i) से $X = A^{-1}B$

अर्थात् $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-29}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{29} \\ -\frac{13}{29} \end{bmatrix}$ [(i) तथा (ii) से]

अतः $x = \frac{24}{29}$, तथा $y = \frac{-13}{29}$ दिए गए समीकरण निकाय का हल है।

$$3x + 2y = 7$$
$$6x + 4y = 8$$

आव्यूह रूप में, निकाय को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

या $AX = B$

जबकि $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

यहाँ पर, $|A| = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$

$$\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

तथा $(\text{Adj}\, A)\, B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -18 \end{bmatrix} \neq O$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

(c) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 9x - 3y &= 21 \end{aligned}\right\}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

या $AX = B$,

जबकि $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$

यहाँ पर, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 3\times(-3) - 9\times(-1) = -9 + 9 = 0$

$\text{Adj A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $(\text{Adj A})\text{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{O}$

अतः दिए गए समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं।

आइए अब हम एक अन्य रैखिक समीकरण लें जहाँ कि

$|A| = 0$ तथा $(\text{Adj A})\,\text{B} \neq \text{O}$.

निम्न समीकरण निकाय को लीजिए

$$x + 2y + z = 5$$
$$2x + y + 2z = -1$$
$$x - 3y + z = 6$$

आव्यूह रूप में, यह समीकरण निकाय इस प्रकार है

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

अर्थात् $AX = B$

जहाँ कि $\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $\text{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

अब $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\because C_1 = C_3)$

तथा $(\text{Adj A})\,\text{B} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ [Adj A की स्वयं जाँच कीजिए]

$$= \begin{bmatrix} 58 \\ 0 \\ -58 \end{bmatrix} \neq \text{O}$$

$\therefore$ $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B \neq O$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(Adj\ \ A)B = \frac{1}{0}\begin{bmatrix} 58 \\ 0 \\ -58 \end{bmatrix}$$ जो कि परिभाषित नहीं है।

अतः समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

इस प्रकार हम पाते हैं कि यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B \neq O$ तो समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होगा।

हम इन परिणामों को सारांश रूप में दे रहे हैं:

(i) यदि $|A| \neq 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B \neq O$ तो समीकरण निकाय का शून्येतर अद्वितीय हल होगा।

(ii) यदि $|A| \neq 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B = O$, तो समीकरण निकाय का निर्रथक हल होगा।

(iii) यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B = O$, तो समीकरण निकाय के अनन्त हल होंगे।

(iv) यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj } A)\, B \neq O$, तो समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होगा। (असंगत निकाय)

देखें आपने कितना सीखा 22.4

1. आव्यूह प्रतिलोमन विधि द्वारा निम्न में प्रत्येक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

(a) $2x + 3y = 4$, $x - 2y = 5$

(b) $x + y = 7$, $3x - 7y = 11$

2. आव्यूह प्रतिलोमन विधि द्वारा निम्न में प्रत्येक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

(a) $x + 2y + z = 3$, $2x - y + 3z = 5$, $x + y - z = 7$

(b) $2x + 3y + z = 13$, $3x + 2y - z = 12$, $x + y + 2z = 5$

(c) $-x + 2y + 5z = 2$, $2x - 3y + z = 15$, $-x + y + z = -3$

(d) $2x + y - z = 2$, $x + 2y - 3z = -1$, $5x - y - 2z = -1$

3. ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण निकाय संगत हैं या नहीं। यदि संगत हैं तो हल ज्ञात कीजिए :

(a) $2x - 3y = 5$, $x + y = 7$

(b) $2x - 3y = 5$, $4x - 6y = 10$

(c) $3x + y + 2z = 3$, $-2y - z = 7$, $x + 15y + 3z = 11$

आइये दोहराएँ

- एक वर्ग आव्यूह व्युत्क्रमणीय होता है यदि इसका संगत सारणिक शून्येतर हो।
- आव्यूह A के iवीं पंक्ति तथा jवें स्तम्भ को हटाने से प्राप्त सारणिक अवयव a_{ij} का उपसारणिक कहलाता है। इसे प्रायः M_{ij} द्वारा दर्शाते हैं।
- a_{ij} का सहखण्ड परिभाषित है : $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- आव्यूह A का सहखण्डज उस आव्यूह का परिवर्त होता है जिसके अवयव दिए गए आव्यूह के अवयवों के सहखण्ड हों। इसे प्रायः Adj A द्वारा व्यक्त करते हैं।
- यदि A कोई n कोटि का वर्ग आव्यूह है, तो

  $A\,(\text{Adj}\,A) = (\text{Adj}\,A)\,A = |A|\ I_n$ जबकि I_n कोटि n का एकांक आव्यूह है।
- किसी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह A, के लिए यदि एक ऐसा व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह B है ि ज स स `
  AB = BA = I, तो B आव्यूह A का गुणात्मक प्रतिलोम कहलाता है। इसे $B = A^{-1}$ द्वारा दर्शाते हैं।
- केवल व्युत्क्रमणीय आव्यूहों के ही गुणात्मक प्रतिलोम होते हैं।
- $a_1x + b_1y = c_1$ तथा $a_2x + b_2y = c_2$ समीकरणों को हम निम्न आव्यूह रूप में लिख सकते हैं :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार यदि $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा B = $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ हो तो

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

- समीकरण निकाय, जो $AX = B$ द्वारा व्यक्त होता है, संगत होता है तथा इसका एक अद्वितीय हल होता है यदि $|A| \neq 0$.
- समीकरण $AX = B$ द्वारा व्यक्त किया गया निकाय असंगत होता है यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj}\,A)\,B \neq O$.
- समीकरण $AX = B$ द्वारा व्यक्त किया गया निकाय संगत होता है तथा इसके अनन्त हल होते हैं यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{Adj}\,A)\,B = O$.
- समीकरण $AX = B$ द्वारा व्यक्ति किया गया निकाय समघाती होता है यदि B शून्य आव्यूह हो।
- एक समघाती रैखिक समीकरण निकाय $AX = 0$ का केवल एक निर्रथक हल होता है यदि $|A| \neq 0$ यह हल है : $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
- समघाती रैखिक समीकरण निकाय $AX = O$ के अनन्त हल होते हैं यदि $|A| = 0$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-inverse.html*
- *http://www.sosmath.com/matrix/coding/coding.html*

आइए अभ्यास करें

1. $|A|$ ज्ञात कीजिए यदि :

(a) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -1 & 0\\ -2 & 5 & 4\end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4\\ 7 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

2. A का सहखण्डज ज्ञात कीजिए यदि

(a) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 7\\ -1 & 4 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

(a) तथा (b) के लिए सत्यापित भी कीजिए कि $A(\text{Adj}\,A) = |A|I_3 = (\text{Adj}\,A)\,A$.

3. यदि सम्भव है तो A^{-1}, ज्ञात कीजिए जब कि आव्यूह A =

(a) $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 7 & 2\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}3 & -5\\ -4 & 2\end{bmatrix}$

(a), (b) तथा (c) के लिए सत्यापित भी कीजिए $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

4. आव्यूह A का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए यदि

(a) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 5 & 2 & -1\end{bmatrix}$ (b) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

5. आव्यूह प्रतिलोमन विधि द्वारा, निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

(a) $\begin{aligned}x+2y&=4\\ 2x+5y&=9\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned}6x+4y&=2\\ 9x+6y&=3\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned}2x+y+z&=1\\ x-2y-z&=\frac{3}{2}\\ 3y-5z&=9\end{aligned}$ (d) $\begin{aligned}x-y+z&=4\\ 2x+y-3z&=0\\ x+y+z&=2\end{aligned}$

(e) $\begin{aligned}x+y-2z&=-1\\ 3x-2y+z&=3\\ 2x+y-z&=0\end{aligned}$

6. आव्यूह प्रतिलोमन विधि द्वारा हल कीजिए :

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4;\quad \frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1;\quad \frac{8}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=3$$

7. λ का मान ज्ञात कीजिए जिससे निम्न समीकरण निकाय संगत हो जाए :

$$2x-3y+4=0$$
$$5x-2y-1=0$$
$$21x-8y+\lambda=0$$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 22.1

1. (a) –12 (b) 10
2. (a) अव्युत्क्रमणीय (b) व्युत्क्रमणीय
3. (a) $M_{11}=4; M_{12}=7; M_{21}=-1; M_{22}=3$ (b) $M_{11}=5; M_{12}=2; M_{21}=6; M_{22}=0$
4. (a) $M_{21}=11; M_{22}=7; M_{23}=1$ (b) $M_{31}=-13; M_{32}=-13; M_{33}=13$
5. (a) $C_{11}=7; C_{12}=-9; C_{21}=2; C_{22}=3$ (b) $C_{11}=6; C_{12}=5; C_{21}=-4; C_{22}=0$
6. (a) $C_{21}=1; C_{22}=-8; C_{23}=-2$ (b) $C_{11}=-6; C_{12}=10; C_{33}=2$

देखें आपने कितना सीखा 22.2

1. (a) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 22.3

1. (a) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{17}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{24} \end{bmatrix}$

4. $(A')^{-1}=\begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

देखें आपने कितना सीखा 22.4

1. (a) $x = \frac{23}{7},\ y = \frac{-6}{7}$

   (b) $x = 6,\ y = 1$

2. (a) $x = \frac{58}{11},\ y = -\frac{2}{11},\ z = -\frac{21}{11}$

   (b) $x = 2,\ y = 3,\ z = 0$

   (c) $x = 2,\ y = -3,\ z = 2$

   (d) $x = 1,\ y = 2,\ z = 2$

3. (a) संगत; $x = \frac{26}{5},\ y = \frac{9}{5}$

   (b) संगत, अनन्त हल

   (c) असंगत

आइए अभ्यास करें

1. (a) –31 (b) –24

2. (a) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -13 \\ -4 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -13 & 13 & 13 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{36} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

5. (a) $x = 2,\ y = 1$ (b) $x = k,\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}k$

   (c) $x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ z = -\frac{3}{2}$ (d) $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$

   (e) $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}$

6. $x = 2,\ y = 3,\ z = 5$

7. $\lambda = -5$

23

संबंध एवं फलन-II

हमारे दैनिक जीवन में हमें वस्तुओं के बीच विभिन्न प्रकार के संबंध देखने को मिलते हैं। संबंध की अवधारणा को गणितीय रूप में स्थापित किया जा चुका है। हम क्रमित युग्म, कार्तीय गुणनफल संबंध, फलन उनके प्रांत तथा परिसर से परिचित है।

इस पाठ में हम संबंधों के प्रकार, फलनों के प्रतिलोम, द्विआधारी सक्रियाएं दो समुच्चयों के बीच संबंध, एक संबंध का फलन होने की स्थितियाँ, विभिन्न प्रकार के फलन और उनके गुणों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- विभिन्न प्रकार के संबंधों को परिभाषित करना
- विभिन्न प्रकार के फलनों के उदाहरणों जैसे एकैकी, बहु-एक, आच्छादक, अन्तर्क्षेपी और ऐकैकी आच्छादन (bijection) को बताकर उन्हें परिभाषित करना
- यह बताना कि क्या फलन एकैकी, बहु-एक, आच्छादक या अन्तर्क्षेपी हैं
- दो फलनों का संयोजन परिभाषित करना
- प्रतिलोम फलनों को परिभाषित करना
- प्रतिलोम के अस्तित्व की परिस्थिति बता सकना
- द्विआधारी संक्रियाओ तथा उनके गुणों की व्याख्या करना, समुच्चय के किसी अवयव का तत्समक तथा प्रतिलोम ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- संख्या पद्धति, क्रमित युग्म की अवधारणा संबंध एवं फलन की परिभाषा संबंध एवं फलन के प्रांत, सह-प्रांत, सह-प्रांत व परिसर

23.1 सम्बन्ध

23.1.1 सम्बन्ध

मान लीजिए A तथा B दो समुच्चय हैं तब समुच्चय A से समुच्चय R में सम्बन्ध R, $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है।

इस प्रकार A से B में सम्बन्ध $R \Leftrightarrow R \subseteq A \times B$

- यदि $(a, b) \in R$ है तब हम इसे aRb लिखते हैं जो कि a, b से सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित है, पढ़ा जाता है। यदि $(a, b) \notin R$ तब हम इसे $a \not R\, b$ लिखते हैं तब हम कहते हैं कि a, b से सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित नहीं है।
- यदि $n(A) = m$ तथा $n(B) = n$, तब $A \times B$ के mn क्रमित युग्म होते हैं तब A से B में कुल सम्बन्धों की संख्या 2^{mn} होती है।

23.1.2 सम्बन्धों के प्रकार

(i) स्वतुल्य संबंध

समुच्चय A पर सम्बन्ध R स्वतुल्य कहलाता है, यदि A का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित हो।

इस प्रकार R स्वतुल्य होता है $\Leftrightarrow$ प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a, a) \in R$

एक सम्बन्ध R स्वतुल्य नहीं होगा यदि उनमें से एक भी अवयव $a \in A$ के लिए $(a, a) \notin R$.

मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$ एक समुच्चय है तब

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (2, 1)\}$ A पर स्वतुल्य सम्बन्ध है।

लेकिन $R_1 = \{(1, 1), (3, 3)\ (2, 1)\ (3, 2)\}$, A पर स्वतुल्य सम्बन्ध नहीं है। क्योंकि $2 \in A$ लेकिन $(2,2) \notin R$.

(ii) सममित सम्बन्ध

समुच्चय A पर सम्बन्ध R सममित सम्बन्ध कहलाता है यदि

प्रत्येक $(a, b) \in A$ के लिए $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

अर्थात् प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए $aRb \Rightarrow bRa$

माना $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा R_1 और R_2 समुच्चय A पर सम्बन्ध

$R_1 = \{(1, 3), (1, 4), (3, 1), (2, 2), (4, 1)$

एवं $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$ द्वारा परिभाषित हैं।

- R_1 समुच्चय A पर एक सममित सम्बन्ध है क्योंकि प्रत्येक $(a, b) \in R_1$ के लिए $(a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R_1$ या प्रत्येक $(a, b) \in A$ के लिए $aR_1b \Rightarrow bR_1a$
लेकिन R_2 सममित नहीं है क्योंकि $(1, 3) \in R_2$ लेकिन $(3, 1) \notin R_2$.

यह आवश्यक नहीं कि समुच्चय A पर स्वतुल्य सम्बन्ध, सममित हो। उदाहरण के लिए सम्बन्ध $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$, समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर स्वतुल्य सम्बन्ध है लेकिन यह सममित नहीं है।

(iii) संक्रमक सम्बन्ध

मान लीजिए कि A कोई समुच्चय है। A पर सम्बन्ध R संक्रमक सम्बन्ध कहलाता है यदि प्रत्येक $a, b, c \in A$ के लिए $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

अर्थात् प्रत्येक $a, b, c \in A$ के लिए aRb एवं $bRc \Rightarrow aRc$

उदाहरण के लिए

प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर, सम्बन्ध R, $x\text{R}y \Rightarrow x, y$ से छोटा है, द्वारा परिभाषित किया जाता है।

संक्रमक है क्योंकि प्रत्येक $x, y, z \in \text{N}$ के लिए $x < y$ तथा $y < z \Rightarrow x < z$

अर्थात् $x\text{R}y$ तथा $y\text{R}z \Rightarrow x\text{R}z$

दूसरा उदाहरण लेने पर

माना समतल में सभी सरल रेखाओं का समुच्चय A है तब A में सम्बन्ध 'के समांतर है' संक्रमक सम्बन्ध है। क्योंकि प्रत्येक $l_1, l_2, l_3 \in \text{A}$ के लिए $l_1 \| l_2$ तथा $l_2 \| l_3 \Rightarrow l_1 \| l_3$.

उदाहरण 23.1. स्वतुल्यता, सममिति तथा संक्रमकता के लिए सम्बन्ध R की जाँच कीजिए जहाँ R इस प्रकार परिभाषित है कि प्रत्येक $l_1, l_2 \in \text{A}$ के लिए $l_1 \text{R} l_2$ यदि $l_1 \perp l_2$।

हल : माना समतल में सभी रेखाओं का समुच्चय A है। दिया है कि प्रत्येक $l_1, l_2 \in \text{A}$ के लिए $l_1 \text{R} l_2 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$।

स्वतुल्यता: R स्वतुल्य नहीं है क्योंकि एक रेखा स्वयं के लम्बवत् नहीं हो सकती अर्थात् $l \perp l$ सत्य नहीं है।

सममितता : माना $l_1, l_2 \in \text{A}$ अतः $l_1 \text{R} l_2$

तब $l_1 \text{R} l_2 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \Rightarrow l_2 \perp l_1 \Rightarrow l_2 \text{R} l_1$

A पर R सममित है

संक्रमकता:

R संक्रमक नहीं है क्योंकि $l_1 \perp l_2$ तथा $l_2 \perp l_3 \not\Leftrightarrow l_1 \perp l_3$

23.1.3 समतुल्य सम्बन्ध

समुच्चय A पर सम्बन्ध R समतुल्य कहलाता है यदि

(i) यह स्वतुल्य है अर्थात् प्रत्येक $a \in \text{A}$ के लिए $(a, a) \in \text{R}$

(ii) यह सममित है अर्थात् प्रत्येक $a, b \in \text{A}$ के लिए $(a, b) \in \text{R} \Rightarrow (b, a) \in \text{R}$

(iii) यह संक्रमक है अर्थात् प्रत्येक $a, b, c \in \text{A}$ के लिए $(a, b) \in \text{R}$ तथा $(b, c) \in \text{R}$ $\Rightarrow (a, c) \in \text{R}$

उदाहरण के लिए सम्बन्ध "के सर्वांगसम है" एक समतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि

(i) यह स्वतुल्य है जैसे प्रत्येक $\Delta \in \text{S}$ के लिए $\Delta \cong \Delta \Rightarrow (\Delta, \Delta) \in \text{S}$ जहाँ S त्रिभुजों का समुच्चय है।

(ii) यह सममित है जैसे $\Rightarrow \Delta_1 \text{R} \Delta_2 \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \cong \Delta_1$

$\Rightarrow \Delta_2 \text{R} \Delta_1$

(iii) यह संक्रमक है $\Delta_1 \cong \Delta_2$ तथा $\Delta_2 \cong \Delta_3 \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_3$

इसका मतलब है कि $(\Delta_1, \Delta_2) \in \text{R}$ तथा $(\Delta_2, \Delta_3) \in \text{R} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_3) \in \text{R}$

उदाहरण 23.2. दर्शाइए कि एक समतल में सभी त्रिभुजों के समुच्चय A पर परिभाषित सम्बन्ध $\text{R} = \{(\text{T}_1, \text{T}_2) : \text{T}_1, \text{T}_2$ के समरूप है$\}$ एक समतुल्य सम्बन्ध है।

हल : हम सम्बन्ध R के निम्नलिखित गुणों का निरीक्षण करते हैं

स्वतुल्यता: हम जानते हैं कि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के समरूप है अतः प्रत्येक $T \in A$ के लिए $(T, T) \in R \Rightarrow R$ के लिए परावर्त्य है।

सममितता माना $(T_1, T_2) \in R$, तब

$(T_1, T_2) \in R \quad \Rightarrow T_1, T_2$ के समरूप है।

$\Rightarrow T_2, T_1$ के समरूप है।

$\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$, इसलिए R सममित है।

संक्रमकता: माना $T_1, T_2, T_3 \in A$ माना $(T_1, T_2) \in R$ तथा $(T_2, T_3) \in R$.

तब $(T_1, T_2) \in R$ तथा $(T_2, T_3) \in R$

$\Rightarrow T_1, T_2$ के समरूप है तथा T_2, T_3 के समरूप है।

$\Rightarrow T_1, T_3$ के समरूप है।

$\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$

अतः R एक समतुल्य सम्बन्ध है।

देखें आपने कितना सीखा 23.1

1. माना एक समतल में सभी रेखाओं के समुच्चय में सम्बन्ध R को $(l_1, l_2) \in R \Rightarrow$ रेखा l_1, l_2 के समान्तर है, द्वारा परिभाषित किया जाता है। दर्शाइए कि R एक समतुल्य सम्बन्ध है।
2. दर्शाइए कि एक समतल में स्थित सभी बिन्दुओं के समुच्चय A, में सम्बन्ध $R = \{(P, Q)$, बिन्दु P से मूलबिन्दु की दूरी तथा बिन्दु Q से मूलबिन्दु की दूरी समान है$\}$ द्वारा परिभाषित किया गया है, एक समतुल्य सम्बन्ध है।
3. दर्शाइए कि समुच्चय $A = \{x \in z;\ \le x \le 12\}$ में संबंध R जो निम्न प्रकार परिभाषित है।

   (i) $R = \{(a, b) : |a - b|, 4$ का गुणज है$\}$

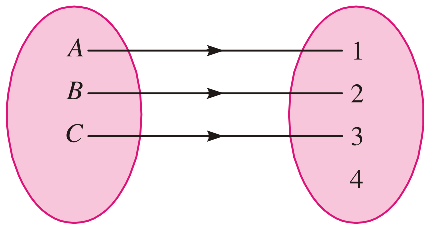
   (ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$ एक समतुल्य संबंध है।
4. सिद्ध कीजिए कि R से R में एक संबंध 'का गुणनखंड है' परावर्त्य तथा संक्रमक है परंतु सममित नहीं है।
5. यदि R तथा S दो समतुल्य संबंध हो तो सिद्ध कीजिए कि $R \cap S$ भी एक समतुल्य संबंध होगा।
6. सिद्ध कीजिए कि $N \times N$ समुच्चय पर एक संबंध R जो $(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$, $\forall\ (a, b), (c, d) \in N \times N$ द्वारा परिभाषित है, एक समतुल्य संबंध है।

23.2 फलनों का वर्गीकरण

मान लीजिए कि A से B पर f एक फलन है। यदि B समुच्चय का प्रत्येक अवयव समुच्चय A के कम से कम एक अवयव का प्रतिबिम्ब हो, अर्थात् यदि समुच्चय B में कोई भी अवयव अयुग्मित न हो तब फलन f समुच्च्य A का समुच्चय B पर आच्छादक कहलायेगा अन्यथा हम कहते हैं कि समुच्चय A समुच्चय B पर एकैकी प्रतिचित्रित फलन है

ऐसे फलन, जिसमें समुच्च्य A का प्रत्येक अवयव समुच्च्य B के अलग अवयव से प्रतिचित्रित होता है, को एकैकी फलन कहते हैं।

एकैकी फलन



चित्र 23.1

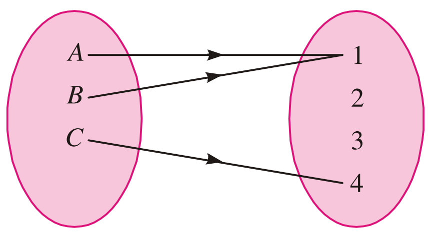
{A, B, C} प्रांत है।

{1, 2, 3, 4} सहप्रांत है।

{1, 2, 3} परिसर है।

किसी फलन में समुच्चय A के एक से अधिक अवयव समुच्चय B के एक ही अवयव पर प्रतिचित्रित हो सकते हैं। इस प्रकार के फलन को बहु एक फलन कहते हैं।

बहु–एक फलन



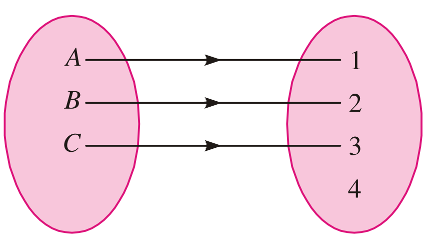
चित्र 23.2

प्रान्त {A, B, C} है।

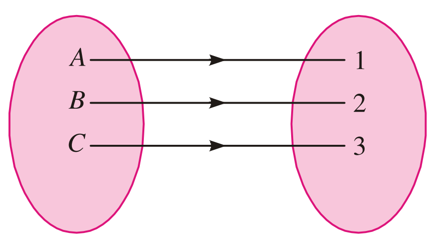
सहप्रान्त {1, 2, 3, 4} है।

परिसर {1, 4} है।

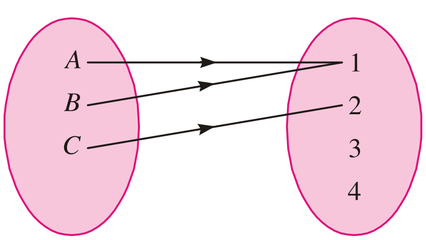
ऐसा फलन, जो एकैकी और आछादक दोनों हो, एकैकी आच्छादक फलन कहलाता है।



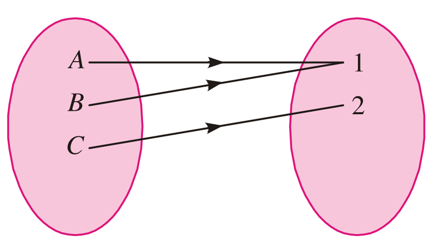
चित्र 23.3



चित्र 23.4



चित्र 23.5



चित्र 23.6

चित्र 23.3 एकैकी फलन दर्शाता है जिसमें प्रतिचित्रण $\{A, B, C\}$ से $\{1, 2, 3, 4\}$ पर अन्तर्क्षेपी है।

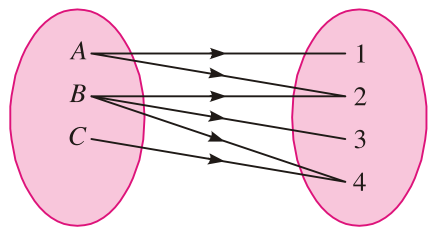
चित्र 23.4 एकैकी फलन दर्शाता है जिसमें प्रतिचित्रण $\{A, B, C\}$ से $\{1, 2, 3\}$ पर आच्छादक है।

चित्र 23.5 बहु-एक फलन दर्शाता है जिसमें प्रतिचित्रण $\{A, B, C\}$ से $\{1, 2, 3, 4\}$ पर अन्तर्क्षेपी है।

चित्र 23.6 बहु-एक फलन दर्शाता है और प्रतिचित्रण $\{A, B, C\}$ से $\{1, 2\}$ पर आच्छादक है।

चित्र 23.4 में दर्शाया गया फलन, एकैकी-आच्छादक भी है।

टिप्पणी: एक-बहु सम्बन्ध भी होते हैं। परन्तु हमारी फलन की परिभाषा से यह फलन नहीं है। नीचे दिया गया चित्र इसकी व्याख्या करता है।



चित्र 23.7

उदाहरण 23.3. बिना ग्राफ की सहायता से सिद्ध कीजिए कि फलन $F: R \to R$, जो $f(x) = 4 + 3x$ द्वारा परिभाषित है, एकैकी फलन है।

हल : एकैकी फलन होने के लिए

$$F(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall \quad x_1, x_2 \in \text{प्रान्त}$$

$\therefore$ अब $f(x_1) = f(x_2)$ से हमें प्राप्त होता है

$$4 + 3x_1 = 4 + 3x_2 \text{ या } x_1 = x_2$$

$\therefore$ f एकैकी फलन है।

उदाहरण 23.4. सिद्ध कीजिए कि फलन

$F: R \to R$, जो $f(x) = 4x^3 - 5$ द्वारा परिभाषित है, एकैकी आच्छादक फलन है।

हल : $f(x_1) = f(x_2) \quad \forall \quad x_1, x_2 \in$ प्रान्त

$\therefore \quad 4x_1^3 - 5 = 4x_2^3 - 5$

$\Rightarrow \quad x_1^3 = x_2^3$

$\Rightarrow \quad x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow \quad (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$

या $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$ यहाँ x_1 तथा x_2 के कोई वास्तविक मान नहीं है, अतः इसे छोड़ देते हैं,

$\therefore$ F एकैकी फलन है।

पुनः मान लीजिए कि $y = (x)$ जहाँ $y \in$ सहप्रान्त, $x \in$ प्रान्त

हमें प्राप्त होता है : $y = 4x^3 - 5$ या $x = \left(\frac{y+5}{4}\right)^{1/3}$

$\therefore$ प्रत्येक $y \in$ सहप्रान्त, प्रान्त में x ऐसा होगा कि $f(x) = y$

अत: F आच्छादक फलन है।

अतएव, F ऐकैकी–आच्छादक है।

उदाहरण 23.5. सिद्ध करो कि $F: R \to R$ जो $F(x) = x^2 + 3$ द्वारा परिभाषित है न तो एकैकी फलन और न ही आच्छादक फलन है।

हल : $F(x_1) = F(x_2)\ \forall\ x_1, x_2 \in$ प्रान्त से हमें प्राप्त होता है

$$x_1^2 + 3 = x_2^2 + 3 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

या $\quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ या $x_1 = -x_2$

अर्थात् F एकैकी फलन नहीं है।

पुन: मान लीजिए कि $y = F(x)$ जहाँ $y \in$ सहप्रान्त, $x \in$ प्रान्त

$\Rightarrow \quad y = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y-3}$

$\Rightarrow \quad \forall\ y < 3$ x का कोई भी वास्तविक मान प्रान्त में नहीं है।

$\therefore \quad$ F एक आच्छादक फलन नहीं है।

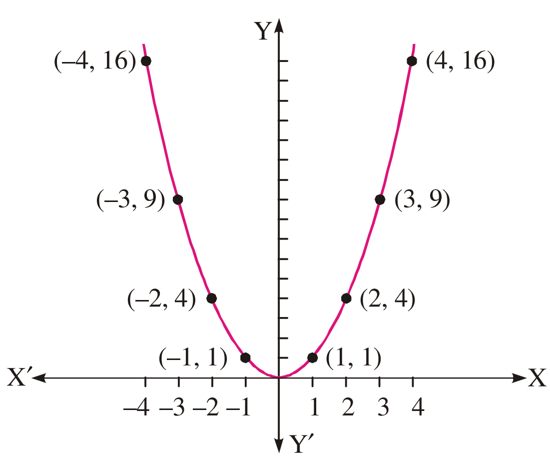
23.3 फलन का ग्राफ के रूप में निरूपण

चूँकि फलन क्रमित युग्मों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

अत: फलन का ग्राफीय प्रदर्शन सदैव सम्भव है। उदाहरणार्थ, आइए $y = x^2$ पर विचार करें–

$$y = x^2$$

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	0	1	1	4	4	9	9	16	16



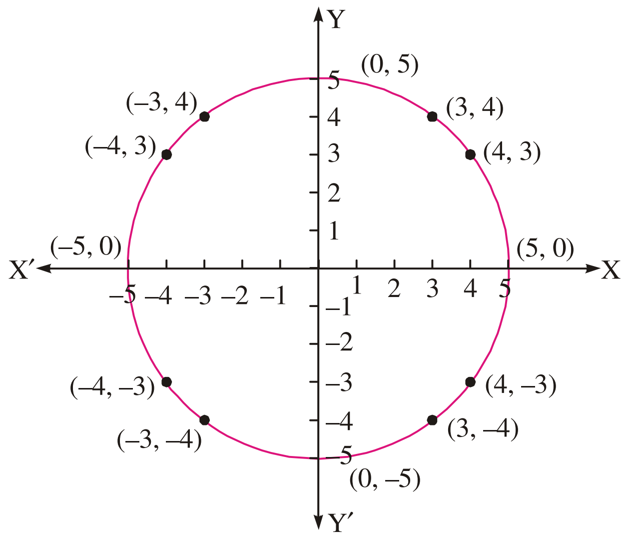
चित्र 23.8

क्या यह एक फलन प्रदर्शित करता है?

हाँ, यह एक फलन प्रदर्शित करता है क्योंकि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक अद्वितीय मान है। आइए अब समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ पर विचार करें।

$$x^2 + y^2 = 25$$

x	0	0	3	3	4	4	5	–5	–3	–3	–4	–4
y	5	–5	4	–4	3	–3	0	0	4	–4	3	–3



चित्र 23.9

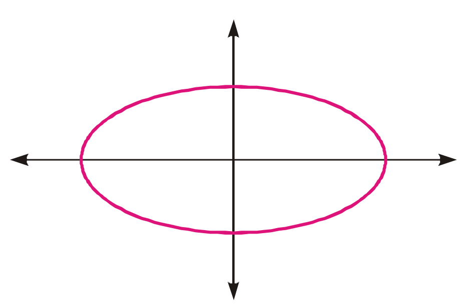
यह ग्राफ एक वृत्त प्रदर्शित करता है?

क्या यह एक फलन प्रदर्शित करता है?

नहीं, यह फलन प्रदर्शित नहीं करता है क्योंकि x के एक (समान) मान के लिए y का अद्वितीय मान नहीं है।

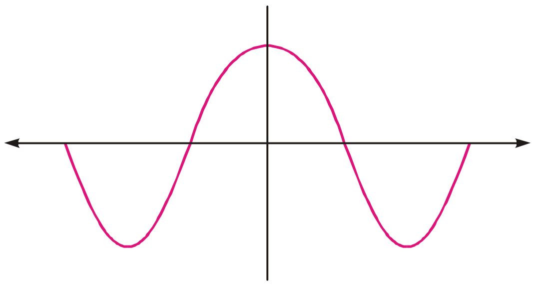
देखें आपने कितना सीखा 23.2

1. (i) क्या यह ग्राफ एक फलन प्रदर्शित करता है।



चित्र 23.10

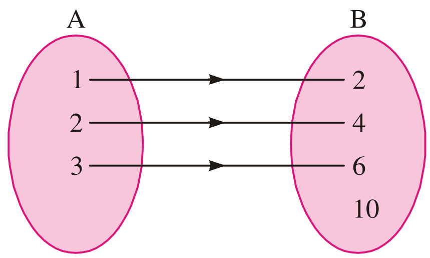
(ii) क्या यह ग्राफ एक फलन प्रदर्शित करता है।



चित्र 23.11

2. निम्नलिखित में से कौन से फलन अन्तर्क्षेपी फलन है?

(a)



चित्र 23.12

(b) $f(x)=x^2$ जहाँ $f:N \to N$, यहाँ N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है।

(c) $f(x)=x$ जहाँ $f:N \to N$

3. निम्नलिखित में से कौन से फलन आच्छादक है यदि $f:R \to R$?

(a) $f(x) = 115x + 49 \quad \forall\ x \in R$ (b) $f(x) = |x| \quad \forall\ x \in N$

4. निम्नलिखित में से कौन से फलन एकैकी फलन है ?

(a) $f:\{20, 21, 22\} \to \{40, 42, 44\}$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x) = 2x$

(b) $f:\{7, 8, 9\} \to \{10\}$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x) = 10$

(c) $f : I \to R$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x) = x^3$

(d) $f : R \to R$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x) = 2 + x^4$

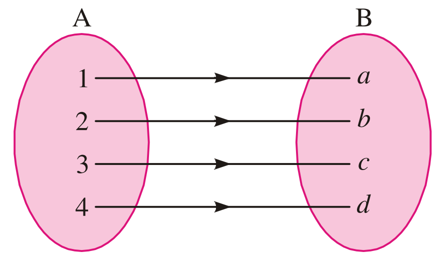
(e) $f : N \to N$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x) = x^2 + 2x$

5. निम्नलिखित में से कौन-कौन से फलन बहु-एक फलन है ?

(a) $f:\{-2, -1, 1, 2\} \to \{2, 5\}$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=x^2+1$

(b) $f:\{0, 1, 2\} \to \{1\}$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x)=1$

(c)



चित्र 23.13

(d) $f : N \to N$ जहाँ f परिभाषित है तथा $f(x) = 5x + 7$

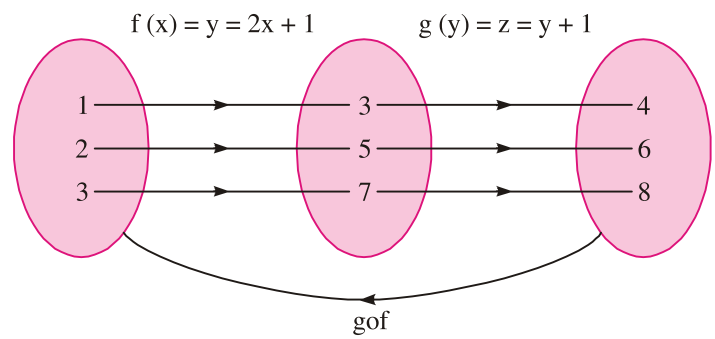
23.4 फलनों का संयोजन

नीचे दिए गए दो फलनों पर विचार कीजिए

$$y = 2x + 1, \qquad x \in \{1, 2, 3\}$$

$$z = y + 1, \qquad y \in \{3, 5, 7\}$$

तब z दो फलनों x तथा y का संयोजन है क्योंकि z, y के पदों में परिभाषित है तथा y, x के पदों में परिभाषित है। इसका ग्राफीय निरुपण हम निम्न प्रकार से दिखा सकते हैं।



चित्र 23.19

फलन g तथा f का संयोजन, मान लीजिए g0f, फलन f का फलन g के रूप में परिभाषित होता है।

यदि $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$

तब gof : A से C

माना $f(x) = 3x + 1$ और $g(x) = x^2 + 2$

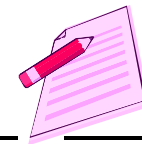
तब $$\text{fog}(x) = f(g(x))$$

$$= f(x^2 + 2)$$

$$= 3(x^2 + 2) + 1 = 3x^2 + 7 \qquad \text{(i)}$$

और $$\text{gof}(x) = g(f(x))$$

$$= g(3x + 1)$$



$$= (3x+1)^2 + 2 = 9x^2 + 6x + 3 \qquad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) से जाँच कीजिए कि क्या

$fog = gof$ है?

स्पष्टत: $fog \neq gof$

इसी प्रकार $fof(x) = f(f(x)) = f(3x+1)$ [fof को फलन f का फलन पढ़िए]

$$= 3(3x+1)+1$$

$$= 9x+3+1 = 9x+4$$

$gog(x) = g(g(x)) = g(x^2+2)$ [फलन g का फलन पढ़िए]

$$= (x^2+2)^2 + 2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 + 2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 6$$

उदाहरण 23.6. यदि $f(x) = \sqrt{x+1}$ और $g(x) = x^2+2$ तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

हल : $fog(x) = f(g(x))$

$$= f(x^2+2)$$

$$= \sqrt{x^2+2+1}$$

$$= \sqrt{x^2+3}$$

$gof(x) = g(f(x))$

$$= g(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$= x+1+2 = x+3.$$

यहाँ हम पुन: देखते हैं कि $(fog) \neq gof$

उदाहरण 23.7. यदि $f(x) = x^3,\ f: R \to R$

$g(x) = \dfrac{1}{x},\quad g: R - \{0\} \to R - \{0\}$ तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

हल : $fog(x) = f(g(x))$

$$= f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{1}{x^3}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \frac{1}{x^3}$$

यहाँ हम देखते हैं कि $fog = gof$

देखें आपने कितना सीखा 23.3

1. निम्नलिखित फलनों के लिए fog, gof, fof तथा gog ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{1-x}, \; x \neq 1.$$

2. निम्नलिखित फलनों के लिए, fog, gof, fof तथा gog लिखिए :

   (a) $f(x) = x^2 - 4, \; g(x) = 2x + 5$

   (b) $f(x) = x^2, \; g(x) = 3$

   (c) $f(x) = 3x - 7, \; g(x) = \dfrac{2}{x}, \; x \neq 0$

3. मान लीजिए कि $f(x) = |x|, \quad g(x) = [x]$ तो सत्यापित कीजिए कि $fog \neq gof$

4. मान लीजिए कि $f(x) = x^2 + 3, g(x) = x - 2$

   सिद्ध कीजिए कि $fog \neq gof$ और $f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

5. यदि $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$ तो दर्शाइए कि $fog = gof$

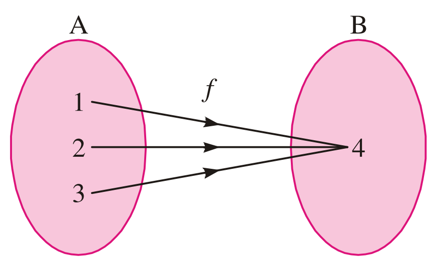
6. मान लीजिए कि $f(x) = |x|, \quad g(x) = (x)^{1/3}, \quad f(x) = \frac{1}{x}; \quad x \neq 0$ तो ज्ञात कीजिए :

   (a) fog (b) goh (c) foh (d) hog (e) fogoh.

   {संकेत: $(fogoh)(x) = f(g(h(x)) = f(g\left(\frac{1}{x}\right)$}

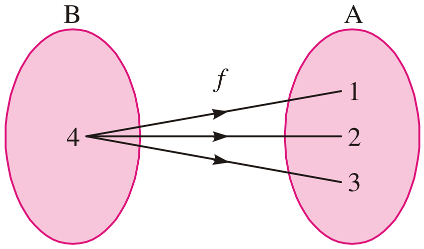
23.5 एक फलन का प्रतिलोम

(A) नीचे दिए गए सम्बन्ध पर विचार कीजिए–



चित्र 23.20

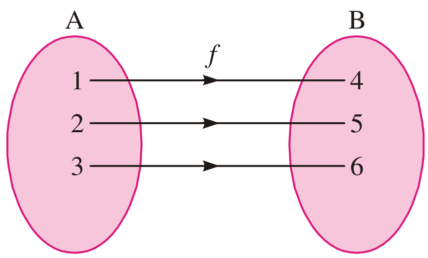
यह बहु-एक फलन है। आइए अब हम इसका प्रतिलोम ज्ञात करें। चित्र में इसे निम्नलिखित रूप में दिखाया जा सकता है :



चित्र 23.21

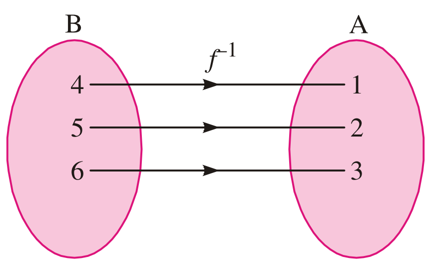
स्पष्टत: यह सम्बन्ध फलन प्रदर्शित नहीं करता। क्यों ?

(B) अब एक अन्य सम्बन्ध लीजिए :



चित्र 23.22

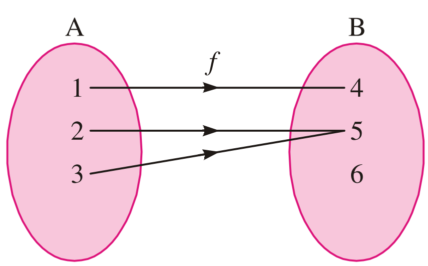
यह एक एकैकी आच्छादक फलन प्रदर्शित करता है। आइए अब हम इस सम्बन्ध का प्रतिलोम ज्ञात करें, जिसे चित्र द्वारा नीचे दिए गए रूप में दर्शाया जा सकता है।



चित्र 23.23

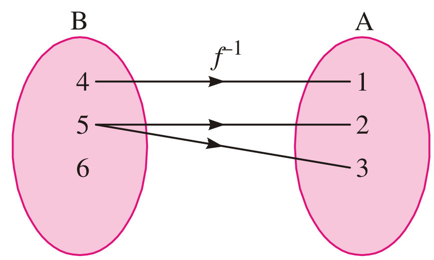
यह फलन प्रदर्शित करता है।

(C) नीचे दिए गए सम्बन्ध पर विचार कीजिए :



चित्र 23.24

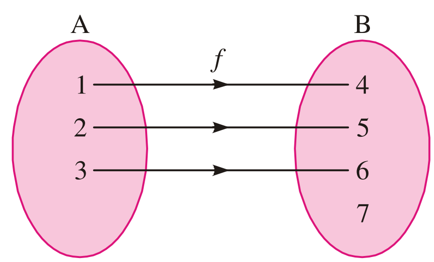
यह बहु-एक फलन निरूपित करता है। अब सम्बन्ध का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए, जिसे नीचे दिए गए रूप से दर्शाया जा सकता है।



चित्र 23.25

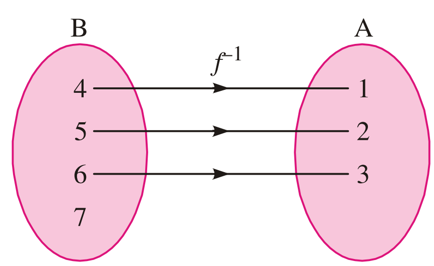
यह फलन प्रदर्शित नहीं करता क्योंकि B के अवयव 6 का सम्बन्ध 'A' के किसी अवयव से नहीं है।

(D) यहाँ दिए गए सम्बन्ध को लीजिए :



चित्र 23.26

यह A से B में एक एकैकी फलन है। इस सम्बन्ध का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।



चित्र 23.27

यह फलन प्रदर्शित नहीं करता है क्योंकि B के अवयव 7 का सम्बन्ध 'A' के किसी भी अवयव से नहीं है। उपर्युक्त सम्बन्धों से हम देखते हैं कि सम्बन्धों को उलटने पर प्राप्त सम्बन्ध फलन हो भी सकता है और नहीं भी।

हम देखते हैं कि फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व तभी है जब फलन एकैकी आच्छादक हो।

देखें आपने कितना सीखा 23.4

1. (i) दर्शाइए कि फलन के प्रतिलोम का अस्तित्व है :

$$y = 4x - 7$$

(ii) मान लीजिए कि 'f' एक एकैकी आच्छादक फलन है जिसका प्रान्त A तथा परिसर B है। इसके प्रतिलोम फलन का प्रान्त तथा परिसर लिखिए।

2. यदि प्रतिलोम फलन का अस्तित्व है तो निम्नलिखित फलनों का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = x + 3 \quad \forall\ x \in R$

(b) $f(x) = 1 - 3x \quad \forall\ x \in R$

(c) $f(x) = x^2 \quad \forall\ x \in R$

(d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}, \quad x \neq 0 \quad x \in R$

23.6 द्विआधारी संक्रियाएँ

माना A तथा B अरिक्त समुच्चय हैं तब $A \times A$ से A में एक फलन A पर द्विआधारी संक्रिया कहलाता है।

यदि A पर एक बाइनरी संक्रिया * द्वारा दर्शायी जाती है, तब $A \times A$ के क्रमित युग्म (a, b) से A का एक अद्वितीय अवयव, $a * b$ से दर्शाया जाता है।

अवयवों को एक निश्चित क्रम में लेते हैं अर्थात् युग्म (a, b) तथा (b, a) से संबंधित अवयव भिन्न–भिन्न प्रकार से होते हैं। अर्थात् $a * b$, $b * a$ के असमान हो सकता है।

माना A एक अरिक्त समुच्चय है '*', A पर एक संक्रिया है, तब

1. * संक्रिया द्वारा A बंद कहलाता है यदि और केवल यदि प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए $a * b \in A$ है।
2. संक्रिया क्रमविनिमेय कहलाती है यदि और केवल यदि प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए $a * b = b * a$।
3. संक्रिया सहचारी कहलाती है यदि और केवल यदि प्रत्येक $a, b, c \in A$ के लिए $(a * b) * c = a * (b * c)$।
4. एक अवयव $e \in A$ तत्समक अवयव है यदि $e * a = a = a * e$
5. एक अवयव $a \in A$ व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि उसमें $b \in A$ इस प्रकार स्थित हो कि $a * b = e = b * a$. b, a का प्रतिलोम कहलाता है।

नोटः यदि एक अरिक्त समुच्चय A संक्रिया * के अन्तर्गत बंद है, तब संक्रिया *, A पर बाइनरी संक्रिया कहलाती है।

उदाहरण के लिए मानलीजिए A सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा *, A पर एक संक्रिया है, जो प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए $a * b = \dfrac{ab}{3}$ द्वारा परिभाषित है।

प्रत्येक $a, b, c \in A$, के लिए, हमें प्राप्त होता है।

(i) $a * b = \dfrac{ab}{3}$ एक धनात्मक वास्तविक संख्या है $\Rightarrow$ A दी गई संक्रिया के अन्तर्गत बन्द है।

$\therefore$ *, A पर एक द्विआधारी संक्रिया है।

(ii) $a*b = \dfrac{ab}{3} = \dfrac{ba}{3} = b*a \Rightarrow$ संक्रिया * क्रमविनिमेय है।

(iii) $(a*b)*c = \dfrac{ab}{3}*c = \dfrac{\frac{ab}{3}.c}{3} = \dfrac{abc}{9}$ तथा $a*(b*c) = a*\dfrac{bc}{3} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{bc}{3} = \dfrac{abc}{9}$

$\Rightarrow$ $(a*b)*c = a*(b*c) \Rightarrow$ संक्रिया * सहचारी है।

(iv) $3 \in A$ इस प्रकार स्थित है कि $3 * a = 3.\dfrac{a}{3} = a = \dfrac{a}{3}.3 = a*3$

$\Rightarrow$ 3 एक तत्समक अवयव है।

(v) प्रत्येक $a \in A$ के लिए, $\dfrac{9}{a} \in A$ इस प्रकार स्थित है, कि $a*\dfrac{9}{a} = \dfrac{a.\frac{9}{a}}{3} = 3$ तथा

$\dfrac{9}{a}*a = \dfrac{\frac{9}{a}.a}{3} = 3 \Rightarrow a*\dfrac{9}{a} = 3 = \dfrac{9}{a}*a \Rightarrow$ A का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय है, तथा

a का प्रतिलोम $\dfrac{9}{a}$ है।

देखें आपने कितना सीखा 23.5

1. ज्ञात कीजिए कि नीचे परिभाषित संक्रिया एक द्विआधारी संक्रिया है या नहीं

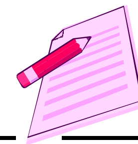
   (i) $a*b = \dfrac{a+b}{2}\ \forall\ a, b \in N$

   (ii) $a*b = a^b, \forall a.b \in Z$

   (iii) $a*b = a^2 + 3b^2, \forall a.b \in R$

2. यदि $A = \{1, 2\}$ है तो A पर परिभाषित द्विआधारी सक्रियाओं की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

3. माना Q (सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) पर एक द्विआधारी संक्रिया इस प्रकार परिभाषित की जाती है सभी $a, b \in Q$ के लिए $a * b = a + 2b$ हो तो



सिद्ध कीजिए कि:

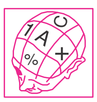
(i) दी गई संक्रिया क्रमविनिमेय नहीं है।

(ii) दी गयी संक्रिया सहचारी नहीं है।

4. माना *, Q^+ पर $a * b = \frac{ab}{3} \forall, a, b \in Q^+$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है तो 4 * 6 का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

5. माना $A = N \times N$ तथा * समुच्चय A पर $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है। सिद्ध कीजिए कि * क्रम विनिमेय तथा सहचारी है। यदि हो तो A का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

6. एक द्विआधारी संक्रिया * समुच्चय $Q - \{-1\}$ पर $a * b = a + b + ab; \forall\, a, b \in Q\{-1\}$ द्वारा परिभाषित है। Q का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए। $Q - \{-1\}$ में किसी अवयव का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।



आइये दोहराएँ

- सम्बन्ध $(a, a) \in R\ \forall\ a \in X$ का X में परावर्त्य सम्बन्ध R है।
- X में सममित सम्बन्ध R, सम्बन्ध $(a, b) \in R$ इसका तात्पर्य $(b, a) \in R$ को संतुष्ट करता है।
- X में ट्रांजीटिव सम्बन्ध R, सम्बन्ध $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R$ इसका तात्पर्य है कि $(a, c) \in R$ को संतुष्ट करता है।
- X में समतुल्य सम्बन्ध R सम्बन्ध परावर्त्य, सममित, ट्रांजीटिव है।
- समुच्चय A पर द्विआधारी संक्रिया * फलन * $A \times A$ से A में है।
- यदि $a * b = b * a$ सभी $a, b \in A$ के लिए, तब संक्रिया क्रम विनिमेय कहलाती है।
- यदि $(a * b) * c = a * (b * c)$, सभी $a, b, \in A$ के लिए, तब संक्रिया सहचारी कहलाती है।
- यदि $e * a = a = a * e$ सभी $a \in A$ के लिए तब अवयव $e \in A$ तत्समक अवयव कहलाता है।
- यदि $a * b = e = b * a$ तब a तथा b एक दूसरे के प्रतिलोम होते हैं।
- अवयवों का एक युग्म जो एक विशेष क्रम में होता है उसे क्रमित युग्म कहलाता है।
- यदि $n(A) = p$, $n(B) = q$ तथा $n(A \times B) = pq$
- $R \times R = \{(x, y) : x, y \in R\}$ तथा $R \times R \times R = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$
- एक फलन में $f : A \to B$, B, f का सहप्रांत है।
- $f, g : X \to R$ तथा $X \subset R$, तब

  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

  $(f \cdot g)x = f(x) \cdot g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$
- एक वास्तविक फलन, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है या इनमें से इसके उपसमुच्चय इसके प्रांत तथा परिसर दोनों हैं।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/13pure/02functions/06composite/index.shtml*
- *http://mathworld.wolfram.com/Composition.html*
- *http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/BinaryColorDevice.shtml*
- *http://mathworld.wolfram.com/BinaryOperation.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित फलनों के लिए fog, gof, fof तथा gog लिखिए :

(a) $f(x) = x^3$ $\qquad g(x) = 4x - 1$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$ $\qquad g(x) = x^2 - 2x + 3$

(c) $f(x) = \sqrt{x-4}, x \geq 4$ $\qquad g(x) = x - 4$

(d) $f(x) = x^2 - 1$ $\qquad g(x) = x^2 + 1$

2. (a) मान लीजिए कि $f(x) = |x|$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $h(x) = x^{1/3}$, fogoh ज्ञात कीजिए।

(b) $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 2x^2 + 1$

fog(3) तथा gof(3) ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित में कौन से समीकरण ऐसा फलन दर्शाते हैं जिसके प्रतिलोम का अस्तित्व है ?

(a) $f(x) = |x|$ $\qquad$ (b) $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

(c) $f(x) = x^2 - 1, x \geq 0$ $\qquad$ (d) $f(x) = \dfrac{3x-5}{4}$ $\qquad$ (e) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ $x \neq 1$

4. यदि $gof(x) = |\sin|$ तथा $gof(x) = (\sin\sqrt{x})^2$ तो f(x) तथा g(x) ज्ञात कीजिए।

5. यदि * समुच्चय Q पर $a * b = \dfrac{a+b}{3}, \forall, a, b \in Q$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया हो तो सिद्ध कीजिए की * Q पर क्रमविनिमेय है।

6. यदि * परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q पर $a * b = \dfrac{ab}{5}, \forall, a, b \in Q$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया हो तो सिद्ध कीजिए कि * समुच्चय Q पर सहचारी है।

7. दिखाइए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में एक संबंध R, जो कि $R = \{(a, b)\} : a \leq b^2\}$ द्वारा परिभाषित है, ना तो स्वतुल्य है, ना सममित है और ना ही संक्रमक है।

8. जांच कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में एक संबंध R, जो कि $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित है, स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमण है।

9. दर्शाइए कि समुच्चय A में एक संबंध R, जो कि, $R = \{(a, b) \, \forall : a = b\} \; a, b \in A$, एक तुल्यता संबंध है।

10. यदि संबंध $A = N \times N$ से परिभाषित है, जहां N एक प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है। यदि सभी $(a, b), (c, d) \in A$ के लिए $* : A \times A \rightarrow A$ इस प्रकार परिभाषित है कि $(a, b) * (c, d) = \{ad + bc, bd)$ तब दिखाइए कि

    (i) * क्रम विनिमेय है।

    (ii) * सहचारी है।

    (iii) संक्रिया * के संबंध में तत्समक अवयव अस्तित्व में नहीं है।

11. प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N पर * एक द्विआधारी सेक्रिया इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = ab$ जहां सभी $a, b \in N$

    (i) * क्रमविनिमेय है (ii) * सहचारी है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 23.2

1. (i) नहीं (ii) हाँ 2. (a), (b)

3. (a) 4. (a), (c), (e) 5. (a), (b)

देखें आपने कितना सीखा 23.3

1. (i) $fog = \dfrac{x^2}{(1-x)^2} + 2$ (ii) $gof = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

   (iii) $fof = x^4 + 4x^2 + 6$ (iv) $gog = x$

2. (a) $fog = 4x^2 + 20x + 21$

   $gof = 2x^2 - 3$

   $fof = x^4 - 8x^2 + 12$

   $gog = 4x + 15$

   (b) $fog = 9, \; gof = 3, \; fof = x^4, \; gog = 3$

   (c) $fog = \dfrac{6-7x}{x}, \; gof = \dfrac{2}{3x-7}, \; fof = 9x - 28, \quad gog = x$

6. (a) $fog = \left| x^{\frac{1}{3}} \right|$ (b) $goh = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (c) $foh = \left| \dfrac{1}{x} \right|$

   (d) $hog = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (e) $fogoh(1) = 1$

देखें आपने कितना सीखा 23.4

1. (ii) प्रांत B है. परिसर A है

2. (a) $f^{-1}(x) = x - 3$ (b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{3}$

(c) प्रतिलोम का अस्तित्व नहीं है। (d) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$

देखें आपने कितना सीखा 23.5

1. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ

2. 16 4. $\dfrac{9}{8}$ 5. (0, 0) 6. तत्समक $= 0$ $a^{-1} = \dfrac{a}{a+1}$

आइए अभ्यास करें

1. (a) $fog = (4x-1)^3$, $gof = 4x^3 - 1$, $fof = x^9$, $gog = 16x - 5$

(b) $fog = \dfrac{1}{(x^2 - 2x + 3)^2}$, $gof = \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 1}{x^4}$,

$fog = x^4$, $gog = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

(c) $fog = \sqrt{x-8}$, $gof = \sqrt{x-4} - 4$,

$fof = \sqrt{\sqrt{x-4} - 4}$, $gog = x - 8$

(d) $fog = x^4 + 2x^2$, $gof = x^4 - 2x^2 + 2$,

$fof = x^4 - 2x^2$, $gog = x^4 + 2x^2 + 2$

2. (a) $\left|\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right|$ (b) $(fog)(3) = 364, (gof)(3) = 289$

3. (c), (d), (e)

4. $f(x) = \sin 2x, g(g) = \sqrt{x}$

8. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं, संक्रमक नहीं

9. हां, R एक तुल्यता संबंध है।

11. (i) क्रमविनिमेय नहीं

24

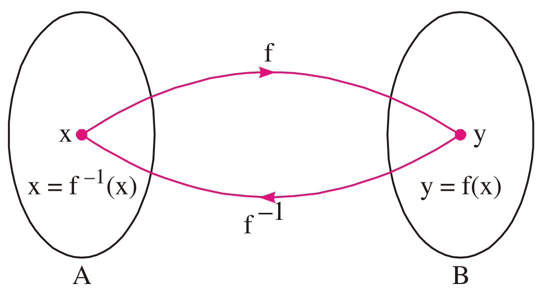
प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

पिछले पाठ में आपने फलन की परिभाषा तथा विभिन्न प्रकार के फलनों के बारे में पढ़ा। हम प्रतिलोम फलन के बारे में वर्णन कर चुके हैं।

आइए, संक्षेप में स्मरण करें :

माना f, A से B तक का एकैकी आच्छादक फलन है।

माना y, B का कोई एक अवयव है। तब f आच्छादक फलन होगा यदि A का कोई एक अवयव $x \in A$ हो जहां $f(x) = y$ हो । क्योंकि f एकैकी फलन दर्शाता है इसलिए x अद्वितीय होना चाहिए। इस प्रकार प्रत्येक $y \in B$ के लिए एक अद्वितीय अवयव $x \in A$ होगा जहां $f(x) = y$ है। अत: हम एक फलन को f^{-1} से प्रदर्शित करके इस रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं जैसे $f^{-1} : B \to A$



चित्र 24.1

$$\therefore \qquad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

ऊपर दिया गया फलन f^{-1} फलन 'f' का प्रतिलोम कहलाता है। एक फलन व्युत्क्रमणीय (invertible) तभी होता है यदि और केवल यदि 'f' एकैकी आच्छादक हो। इस स्थिति में f^{-1} का प्रान्त, f का परिसर है और f^{-1} का परिसर, f का प्रान्त है।

आइए एक दूसरा उदाहरण लें।

हम फलन को परिभाषित करते हैं, f : कार $\to$ रजिस्ट्रेशन नम्बर

यदि हम लिखते हैं, g : रजिस्ट्रेशन नम्बर $\to$ कार

हम देखते हैं कि f का प्रान्त (Domain), g का परिसर है और f का परिसर, g का प्रान्त है।

अत: हम कहते हैं कि g, f का प्रतिलोम फलन है अर्थात $g = f^{-1}$। इस अध्याय में हम कुछ और प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों, उनके प्रान्तों और परिसर के बारे में सीखेंगे और ऐसे व्यंजकों को हल करना सीखेंगे जिसमें प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन सम्मिलित हो।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों को परिभाषित करना
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अस्तित्व की स्थिति ज्ञात करना
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के मुख्य मानों (Principal values) को परिभाषित करना
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात करना
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्मों का वर्णन करना
- ऐसे प्रश्नों को हल करना जिनमें प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन सम्मिलित हों

पूर्व ज्ञान

- फलन, फलनों के प्रकार, प्रान्त तथा परिसर की जानकारी
- त्रिकोणमितीय फलनों के योग, अन्तर, गुणज और अपवर्तक के सूत्र

24.1 क्या प्रत्येक फलन का प्रतिलोम सम्भव है?

एक फलन के दो क्रमित युग्मों (x_1, y) तथा (x_2, y) लीजिए। यदि हम इन्हें उल्टें तो हमें (y, x_1) तथा (y, x_2) प्राप्त होगा। यह फलन नहीं है क्योंकि दोनों क्रमित युग्मों का प्रथम अवयव एक ही है।

आइए अब दूसरा फलन लें

$$\left(\sin\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\sin\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{और} \quad \left(\sin\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

इस का प्रतिलोम लिखने पर हमें

$$\left(1, \sin\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ और } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

प्राप्त होता है जो फलन है।

आइए दैनिक जीवन से सम्बन्धित कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

f : विद्यार्थी $\rightarrow$ गणित में प्राप्त अंक

क्या आप सोचते है कि f^{-1} का अस्तित्व है?

यह फलनः हो भी सकता है और नहीं भी, क्योंकि जिस स्थिति में दो विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक समान हो जाऐंगे, f^{-1} फलन नहीं रहेगा। क्योंकि दो या दो से अधिक क्रमित युग्मों के प्रथम अवयव एक ही होंगे। अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि प्रत्येक फलन व्युत्क्रमणीय नहीं है।

उदाहरण 24.1. यदि $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^3 + 4$ द्वारा परिभाषित है तो f^{-1} क्या होगा ?

हल : इस स्थिति में 'f' एकैकी तथा आच्छादक दोनों है।

$\Rightarrow f$ व्युत्क्रमणीय है।

मान लीजिए कि $\qquad y = x^3 + 4$

$\therefore \qquad y-4=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-4}$

क्योंकि 'f' का प्रतिलोम f^{-1} है, अतः $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-4}$

जो फलन एकैकी तथा अच्छादक होते हैं वे व्युत्क्रमणीय होंगे ।

आइए इसे त्रिकोणमिति तक बढ़ाएँ :

$y=\sin x$ लीजिए । यहां प्रांत (Domain) वास्तविक संख्या अथवा कोणों का समुच्चय है। परिसर सभी वास्तविक संख्याओं, जो -1 तथा 1 के बीच में है जिनमें -1 और 1 भी सम्मिलित हैं अर्थात $-1 \le y \le 1$ का समुच्चय है। हम जानते हैं कि प्रत्येक दिए हुए कोण अथवा संख्या x के लिए y का एक अद्वितीय मान होता है।

प्रतिलोम प्रक्रिया में, हम साइन के विशिष्ट मान को संगत कोण अथवा संख्या जानना चाहते हैं।

मान लीजिए कि $\qquad y=\sin x=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \qquad \sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{13\pi}{6}=....$$

x के मान $\quad \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}=....$ हो सकते हैं।

अतः x के अनन्त मान हैं।

$y=\sin x$ को $\quad \left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right),...$ से भी प्रदर्शित किया जा सकता है।

प्रतिलोम सम्बन्ध होगा : $\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{5\pi}{6}\right),...$

यह स्पष्ट है कि यह फलन नहीं है क्योंकि सभी क्रमित युग्मों के प्रथम अवयव $\frac{1}{2}$ हैं जो फलन की परिभाषा के प्रतिकूल है।

आइए, अब $y=\sin x$ पर विचार करें जहां $x \in R$ प्रान्त तथा $y \in [-1, 1]$ अथवा $-1 \le y \le 1$ जिसे परिसर कहते हैं यह बहु-एक आच्छादक फलन है। अतः यह व्युत्क्रमणीय नहीं है।

क्या $y = \sin x$ को व्युत्क्रमणीय बनाया जा सकता है और कैसे?

हां, यदि हम इसके प्रान्त को इस प्रकार सीमित रखें कि यह एकैकी आच्छादक बन जाए, इस के लिए x के मान निम्नलिखित रूप में लेने होंगे :

(i) $\quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \qquad y \in [-1, 1] \qquad$ अथवा

(ii) $\quad \frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2} \qquad y \in [-1, 1] \qquad$ अथवा

(iii) $\quad -\frac{5\pi}{2} \le x \le -\frac{3\pi}{2} \qquad y \in [-1, 1] \qquad$ आदि

अब प्रतिलोम फलन $y=\sin^{-1}x$ पर विचार कीजिए।

हम फलन का प्रान्त और परिसर जानते हैं। प्रतिलोम फलन के लिए उनके प्रांत तथा परिसर को परस्पर बदल देते हैं। इसलिए

(i) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ अथवा

(ii) $\frac{3\pi}{2} \le y \le \frac{5\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ अथवा

(iii) $-\frac{5\pi}{2} \le y \le -\frac{3\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ आदि

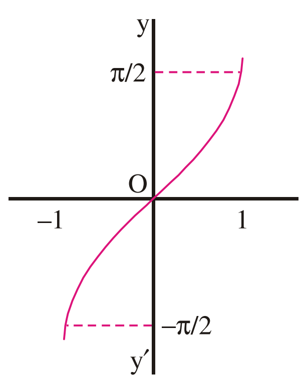
यहां हम कोणों के सभी मानों में न्यूनतम संख्यात्मक मान लेंगे जिसके साइन का मान x है जिसे $\sin^{-1} x$ का मुख्य मान (Principal value) कहा जाता है।

इसके लिए केवल $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ स्थिति है। अत: $y = \sin^{-1} x$ के मुख्य मान के लिए प्रान्त $[-1, 1]$ है अर्थात $x \in [-1, 1]$ है तथा परिसर $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ है।

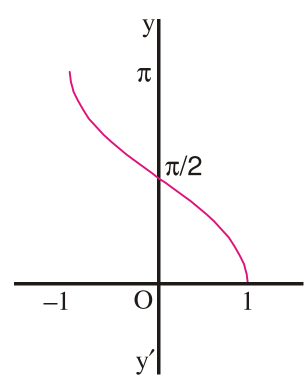
इसी प्रकार, हम अन्य प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की चर्चा कर सकते हैं।

	फलन	प्रान्त	परिसर (मुख्यमान)
1.	$y = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2.	$y = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
3.	$y = \tan^{-1} x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
4.	$y = \cot^{-1} x$	R	$[0, \pi]$
5.	$y = \sec^{-1} x$	$x \ge 1$ या $x \le -1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
6.	$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$	$x \ge 1$ या $x \le -1$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

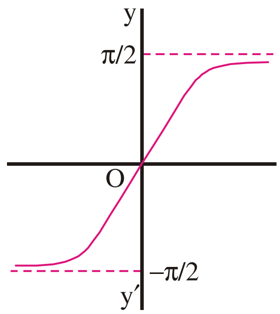
24.2 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के ग्राफ (आलेख)



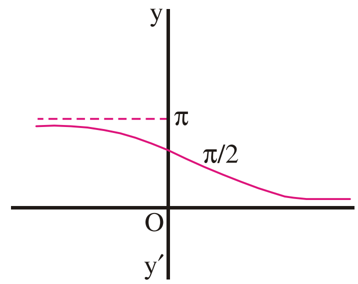
$y = \sin^{-1} x$



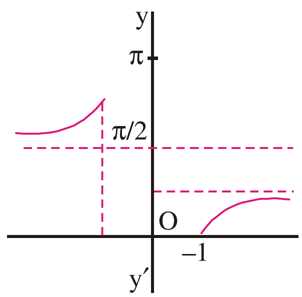
$y = \cos^{-1} x$



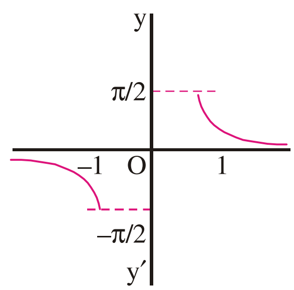
$y = \tan^{-1} x$



$y = \cot^{-1} x$



$y = \sec^{-1} x$



$y = \text{cosec}^{-1} x$

चित्र 24.2

उदाहरण 24.2. निम्नलिखित के मुख्य मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

हल : (i) मान लीजिए कि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \theta$

अथवा $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ अथवा $\theta = \frac{\pi}{4}$

(ii) मान लीजिए कि $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ अथवा $\theta = \frac{2\pi}{3}$

(iii) मान लीजिए कि $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \theta$ अथवा $-\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\theta$ अथवा $\tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow$ $\theta = -\frac{\pi}{6}$

उदाहरण 24.3. निम्नलिखित के मुख्य मान ज्ञात कीजिए :

(a) (i) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\tan^{-1}(-1)$

(b) मुख्य मान का उपयोग करते हुए $\sec\left[\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : (a) मान लीजिए कि (i) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\theta$, तब

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\theta \quad \text{अथवा} \quad \cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

(ii) मान लीजिए कि $\tan^{-1}(-1)=\theta$, तब

$$-1=\tan\theta \quad \text{अथवा} \quad \tan\theta=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta=-\frac{\pi}{4}$$

(b) मान लीजिए कि $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$, तब

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\theta \quad \text{अथवा} \quad \cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \quad \sec\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sec\theta=\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण 24.4. सरल कीजिए :

(i) $\cos\left(\sin^{-1}x\right)$ (ii) $\cot\left(\operatorname{cosec}^{-1}x\right)$

हल : (i) मान लीजिए कि $\sin^{-1}x=\theta$

$$\Rightarrow \quad x=\sin\theta$$

$$\therefore \quad \cos\left[\sin^{-1}x\right]=\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$$

(ii) मान लीजिए कि $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$

$$\Rightarrow \quad x=\operatorname{cosec}\theta$$

$$\therefore \quad \cot\theta=\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}=\sqrt{x^2-1}$$

देखें आपने कितना सीखा 24.1

1. निम्नलिखित में प्रत्येक का मुख्य मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (b) $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ (c) $\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(d) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (e) $\cot^{-1}(1)$

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\cos\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right)$ (b) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{4}\right)$ (c) $\cos\left(\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(d) $\tan\left(\sec^{-1}\sqrt{2}\right)$ (e) $\operatorname{cosec}\left[\cot^{-1}(-\sqrt{3})\right]$

3. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक को सरल कीजिए :

(a) $\sec\left(\tan^{-1}x\right)$ (b) $\tan\left(\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{x}{2}\right)$ (c) $\cot\left(\operatorname{cosec}^{-1}x^2\right)$

(d) $\cos\left(\cot^{-1}x^2\right)$ (e) $\tan\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x}\right)\right)$

24.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुण-धर्म

गुणधर्म 1: $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta,\ -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

हल : मान लीजिए कि $\sin\theta = x$

$\Rightarrow \qquad \theta=\sin^{-1}x=\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$

साथ ही $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

(i) $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta,\ 0\le\theta\le\pi$

(ii) $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta,\ -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

(ii) मान लीजिए कि $\cot^{-1}x=\theta$

$\Rightarrow \qquad x=\cot\theta$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{1}{x}=\tan\theta$

$\Rightarrow \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\therefore \qquad \cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

गुणधर्म 2: (i) $\operatorname{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (ii) $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(iii) $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

हल: (i) मान लीजिए कि $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$

$\Rightarrow \qquad x=\operatorname{cosec}\theta$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{1}{x} = \sin\theta$

$\therefore \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \qquad \text{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(iii) मान लीजिए कि $\sec^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow \qquad x = \sec\theta$

$\therefore \qquad \dfrac{1}{x} = \cos\theta$ अथवा $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\therefore \qquad \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

गुणधर्म 3: (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ (ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

(iii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

हल : (i) मान लीजिए कि $\sin^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow \qquad -x = \sin\theta$ अथवा $x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$

$\therefore \qquad -\theta = \sin^{-1} x$ अथवा $\theta = -\sin^{-1} x$

अथवा $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

(ii) मान लीजिए कि $\tan^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow \qquad -x = \tan\theta$ अथवा $x = -\tan\theta = \tan(-\theta)$

$\therefore \qquad \theta = -\tan^{-1} x$ अथवा $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

(iii) मान लीजिए कि $\cos^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow \qquad -x = \cos\theta$ अथवा $x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

$\therefore \qquad \cos^{-1} x = \pi - \theta$

$\therefore \qquad \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

गुणधर्म 4: (i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

हल: (i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

मान लीजिए कि $\sin^{-1} x = \theta \;\Rightarrow\; x = \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

अथवा $\cos^{-1} x = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\Rightarrow \quad \theta + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ अथवा $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(ii) मान लीजिए कि $\cot^{-1} x = \theta \;\Rightarrow\; x = \cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \quad \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta$ अथवा $\theta + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

अथवा $\cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(iii) मान लीजिए कि $\operatorname{cosec}^{-1} x = \theta$

$\Rightarrow \quad x = \operatorname{cosec}\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\therefore \quad \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta$ अथवा $\theta + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

गुणधर्म 5: (i) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(ii) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

हल : (i) मान लीजिए कि $\tan^{-1} x = \theta,\; \tan^{-1} y = \phi \;\Rightarrow x = \tan\theta, y = \tan\phi$

हमें सिद्ध करना है कि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

उपर्युक्त मानों को बायें पक्ष तथा दायें पक्ष में रखने पर

वाम पक्ष $= \theta + \phi$ और दायें पक्ष $= \tan^{-1}\left[\frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\tan(\theta+\phi)\right] = \theta + \phi =$ बायें पक्ष

अतः उपर्युक्त परिणाम सत्य है।

इसी प्रकार (ii) को भी सिद्ध कर सकते हैं।

गुणधर्म 6: $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left[\dfrac{2x}{1+x^2}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right] = \tan^{-1}\left[\dfrac{2x}{1-x^2}\right]$

(a) (b) (c) (d)

हल : मान लीजिए कि $x = \tan\theta$

(a), (b), (c) तथा (d) में प्रतिस्थापित करने पर

$$2\tan^{-1}x = 2\tan^{-1}(\tan\theta) = 2\theta \qquad \text{......(i)}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta \qquad \text{.....(ii)}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta \qquad \text{......(iii)}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta \qquad \text{.....(iv)}$$

(i),(ii),(iii) तथा (iv) से हमें प्राप्त हुआ

$$2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

गुणधर्म 7:

(i) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \sec^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$$

(ii) $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] = \operatorname{cosec}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \cot^{-1}\left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$$= \sec^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$$

उपपत्ति: मान लीजिए कि $\sin^{-1}x = \theta \Rightarrow \sin\theta = x$

(i) $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$, $\tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ और } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \qquad \sin^{-1} x = \theta = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ii) मान लीजिए कि $\cos^{-1} x = \theta \Rightarrow \qquad x = \cos\theta$

$$\therefore \qquad \sin\theta = \sqrt{1-x^2}, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x}, \quad \cot\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ और } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cos^{-1} x = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

उदाहरण 24.5. सिद्ध कीजिए $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

हल : सूत्र $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ का उपयोग करते हुए हमें प्राप्त होता है

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{13}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{90}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

उदाहरण 24.6. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

हल : मान लीजिए कि $\sqrt{x} = \tan\theta$ तब

बायाँ पक्ष $= \theta$ और दायाँ पक्ष $= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta) = \frac{1}{2}\times 2\theta = \theta$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उदाहरण 24.7. समीकरण हल कीजिए :

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x,\ x>0$$

हल : मान लीजिए कि $x=\tan\theta$ तब

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=\frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\pi}{4}-\theta=\frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \theta=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \qquad x=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

उदाहरण 24.8. सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

हल : मान लीजिए कि $x^2=\cos 2\theta$, तब

$$2\theta=\cos^{-1}(x^2)$$

$$\Rightarrow \qquad \theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$$

$x^2=\cos 2\theta$ को दिये गए समीकरण के बायें-पक्ष में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}+\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

देखें आपने कितना सीखा 24.2

1. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (b) $\cot(\tan^{-1}\alpha+\cot^{-1}\alpha)$

(c) $\tan\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

(d) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$ (e) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}\right)$

2. यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\beta$ हो, तो, सिद्ध कीजिए कि

$$x^2-2xy\cos\beta+y^2=\sin^2\beta$$

3. यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ हो, तो, सिद्ध कीजिए कि

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

4. सिद्ध कीजिए कि :

(a) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}$ (b) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

(c) $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$ (d) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

5. समीकरण $\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$ को हल कीजिए।

आइये दोहराएँ

- यदि किसी त्रिकोणमितीय फलन के प्रांत को प्रतिबन्धित कर दिया जाए, तो उसके प्रतिलोम का अस्तित्व संभव है।

(i) $\sin^{-1}x=y$ यदि $\sin y=x$ जहां $-1\le x\le 1, -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

(ii) $\cos^{-1}x=y$ यदि $\cos\ y=x$ जहां $-1\le x\le 1, 0\le y\le\pi$

(iii) $\tan^{-1} x = y$ यदि $\tan y = x$ जहां $x \in R, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

(iv) $\cot^{-1} x = y$ यदि $\cot y = x$ जहां $x \in R, 0 < y < \pi$

(v) $\sec^{-1} x = y$ यदि $\sec y = x$ जहां $x \geq 1, \quad 0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ or $x \leq -1, \frac{\pi}{2} < y \leq \pi$

(vi) $\operatorname{cosec}^{-1} x = y$ if $\operatorname{cosec} y = x$ जहां $x \geq 1, 0 < y \leq \frac{\pi}{2}$

अथवा $\quad x \leq -1, -\frac{\pi}{2} \leq y < 0$

- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों को दिए हुए अन्तरालों में उनके अक्षों को परस्पर बदलने के द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। जैसे कि $y = \sin x$, की स्थिति में।
- **गुणधर्म :**

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$, $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$, $\tan(\tan^{-1}\theta) = \theta$ and $\sin(\sin^{-1}\theta) = \theta$

(ii) $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$, $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

(iv) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(v) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

(vi) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

(vii) $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_trigonometric_functions*
- *http://mathworld.wolfram.com/InverseTrigonometricFunctions.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए :

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए :

(a) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{23}{11}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\tan^{-1}2$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

3. (a) सिद्ध कीजिए कि $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

(b) सिद्ध कीजिए कि $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}\left(2x^2-1\right)$

(c) सिद्ध कीजिए कि $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)=2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सिद्ध कीजिए :

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-x$

(c) $\cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{b-c}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{ca+1}{c-a}\right)=0$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को हल कीजिए :

(a) $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$ (b) $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$

(c) $\cos^{-1}x+\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{\pi}{6}$ (d) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+2)=\frac{\pi}{12}, x>0$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 24.1

. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $-\frac{\pi}{3}$ (e) $\frac{\pi}{4}$

2. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1 (e) -2

3. (a) $\sqrt{1+x^2}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ (c) $\sqrt{x^4-1}$ (d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$ (e) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

देखें आपने कितना सीखा 24.2

1. (a) 1 (b) 0 (c) $\dfrac{x+y}{1-xy}$ (d) $\dfrac{5}{12}$ (e) $-\dfrac{7}{17}$

5. $0, \pm\dfrac{1}{2}$

आइये अभ्यास करें

5. (a) $\dfrac{1}{6}$ (b) $\dfrac{\pi}{4}$ (c) ± 1 (d) $\sqrt{3}$

25

सीमा एवं सांतत्य

फलन $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ लीजिए।

आप देख सकते हैं कि फलन $x=1$ पर परिभाषित नहीं है क्योंकि $(x-1)$ हर में है। x का मान 1 के बिल्कुल पास, लेकिन 1 के बराबर नहीं, जैसा नीचे तालिका में दिया गया है। इस अवस्था में $x-1 \neq 0$ क्योंकि $x \neq 1$

हम $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=x+1$ लिख सकते हैं क्योंकि $x-1\neq 0$

इसलिए $(x-1)$ से भाग देना संभव है।

तालिका 1

x	$f(x)$
0.5	1.5
0.6	1.6
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9
0.91	1.91
:	:
:	:
0.99	1.99
:	:
:	:
0.9999	1.9999

तालिका 2

x	$f(x)$
1.9	2.9
1.8	2.8
1.7	2.7
1.6	2.6
1.5	2.5
:	:
:	:
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
:	:
:	:
1.00001	2.00001

उपरोक्त तालिकाओं में आप देख सकते हैं कि $x, 1$ की ओर अग्रसर हो रहा है तथा $f(x)$ का संगत मान 2 के पास-पास पहुंच रहा है (अग्रसर है)। अलबत्ता इस अवस्था में $f(x)$,$x=1$ पर परिभाषित नहीं है। इस विचार को यह कह सकते हैं कि जब $x, 1$ की ओर अग्रसर होता है तो $f(x)$ के मान की सीमा 2 है।

आइए अब एक अन्य फलन $f(x)=2x$ लें। हम इस फलन के आचरण $x=1$ बिन्दु के पास तथा $x=1$ पर देखेंगे। हम देखते हैं जब $x, 1$ की ओर अग्रसर होता है, तो $f(x)$ का संगत मान 2 की ओर अग्रसर होता है तथा $x=1$ पर $f(x)$ का मान 2 है।

अत: उपरोक्त खोज से हम $f(x)$ के आचरण के विषय में और अधिक क्या कह सकते हैं जब x, 2 के पास है तथा जब $x=2$ है।

इस पाठ में हम किसी फलन के किसी बिन्दु के पास तथा उस बिन्दु पर $f(x)$ का आचरण देखेंगे चाहे उस बिन्दु पर फलन परिभाषित भी न हो।

उद्देश्य

इस पास के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- एक फलन की सीमा को परिभाषित करना
- एक फलन की मानक सीमा ज्ञात करना
- मानक सीमाओं तथा विभिन्न विधियों का प्रयोग कर सीमाएं ज्ञात करना
- एक बिन्दु पर फलन के सांतत्य को परिभाषित करना तथा उसकी ज्यामितीय व्याख्या करना
- एक फलन का एक अन्तराल में सांतत्य को परिभाषित करना
- किसी बिन्दु पर एक फलन का सांतत्य तथा अन्यथा ज्ञात करना
- उदाहरणों की सहायता से फलन के सांतत्य के प्रमेयों का कथन देना तथा उनका प्रयोग करना

पूर्व ज्ञान

- फलन की संकल्पना
- एक फलन का आलेख खींचना
- त्रिकोणमितीय फलनों की संकल्पना
- चरघांताकी तथा लघुगणकीय फलनों की संकल्पना

25.1 एक फलन की सीमा

इस पाठ के आरम्भ में हमने फलन $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ को लिया था। हमने देखा था जब $x, 1$ की ओर अग्रसर होता है, तो $f(x), 2$ की ओर अग्रसर होता है। सामान्यत: यदि x, a की ओर अग्रसर होता है तो $f(x), L$ की ओर अग्रसर होता है, तो हम कहते हैं L, फलन $f(x)$ का सीमांत मान है

संकेतों में इसे लिखा जाता है $\quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

आइए अब हम फलन $(5-x)$ का सीमान्त मान ज्ञात करें, जब $x, 0$ की ओर अग्रसर होता है।

अर्थात $\lim_{x \to 0} (5x-3)$

इस सीमा को ज्ञात करने के लिए, हम शून्य के दोनों ओर, x को मान देते हैं

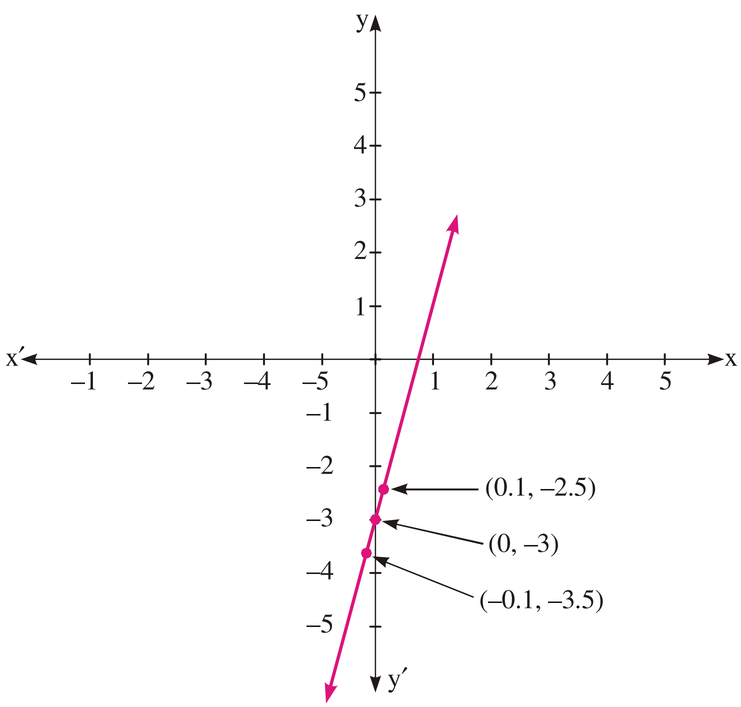
x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001..........
$5x-3$	-3.5	-3.05	-3.005	-3.0005..........

x	0.1	0.01	0.001	0.0001..........
$5x-3$	-2.5	-2.95	-2.995	-2.9995.........

उपरोक्त से साफ है कि $(5x-3)$ की सीमा जब $x \to 0, -3$ है

अर्थात $\lim_{x \to 0} (5x-3) = -3$

इसको चित्र 25.1 में आलेख के रूप में दिखाया गया है :



चित्र 25.1

एक बिन्दु पर किसी फलन का सीमान्त मान, चर को उस बिन्दु के बहुत पास के मान देकर ज्ञात करना, सदा सुविधाजनक नहीं है।

अत: हमें इस विधि के अतिरिक्त विधियां चाहिएँ जिनके द्वारा हम फलन की सीमा ज्ञात कर सकें, जब x (स्वतंत्र चर) एक परिमित राशि माना a की ओर अग्रसर है

आइए एक उदाहरण लें- $\lim_{x \to 3} f(x)$, ज्ञात कीजिए जब $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$

इसे हम प्रतिस्थापन विधि से ज्ञात कर सकते हैं, जिसके चरण निम्न हैं :

चरण-1 : हम 'a' के निकट एक मान लें, जैसे $a+h$ जहां h एक बहुत छोटी धनात्मक सख्यां है स्पष्टत: जब $x \to a$ तब $h \to 0$	$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ के लिए हम x को $3+h$ लिखते हैं। $x \to 3$ तो $h \to 0$
चरण-2 : $f(a+h)$ को सरल करें	अब $f(x)=f(3+h)$ $=\dfrac{(3+h)^2-9}{3+h-3}$ $=\dfrac{h^2+6h}{h}$ $=h+6$
चरण-3 : $h=0$ रखकर अभीष्ट मान (परिणाम) प्राप्त करें।	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}(6+h)$ जब $x \to 0$ तो $h \to 0$ $h=0$ रखने पर, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6+0=6$

टिप्पणी: ध्यान दें कि $f(3)$ परिभाषित नहीं है फिर भी इस फलन की सीमा जब $x \to 3, 6$ है। अब हम विभिन्न प्रकार के फलनों की सीमा ज्ञात करने की अन्य विधियों पर चर्चा करेंगे।

आइए अब एक अन्य उदाहरण लें

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ ज्ञात करें जहाँ } f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

यहाँ $x \neq 1$ के लिए $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

$$=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)}$$

यह दर्शाता है कि यदि $f(x)$ का रूप $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ हो, तो हम उसे गुणनखंड की विधि से हल कर सकते हैं। इस स्थिति में हम निम्न चरण अपनाते हैं:

चरण-1 : $g(x)$ तथा $h(x)$ के गुणनखंड करें	हल : $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ $=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$ $(\because x\neq 1, \therefore x-1\neq 0$ और इस प्रकार हम इसे काट सकते हैं।
चरण-2 : $f(x)$ को सरल करें	$\therefore \quad f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$
चरण-3 : x का मान रखने पर हमें अभीष्ट परिणाम मिलता है।	$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{1+1+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$ परन्तु $f(1)=1$ (दिया है) इस अवस्था में $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

अत: $f(x)$ की सीमा जब $x\to a$ तथा फलन का उस बिन्दु $x=a$ पर मान अलग-अलग हो सकते हैं।

आइए, अब हम एक ऐसा उदाहरण लें जो न तो गुणनखंड विधि और न ही प्रतिस्थापन विधि से हल हो सकता है।

मान ज्ञात कीजिए : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

इसके लिए हम निम्न चरण लेते हैं :

चरण-1: उस पद का परिमेयीकरण करें जिसमें वर्गमूल है

चरण-2: सरल करें

चरण-3: x का मान रखें तथा वांछित परिणाम प्राप्त करें

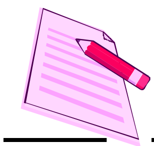
हल :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{(1+x)^2}-\sqrt{(1-x)^2}}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

[$\because x\neq 0$ अत: उसे काट सकते हैं।]



$$= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

25.2 बाईं पक्ष तथा दाईं पक्ष सीमाएं

हम पहले ही देख चुके हैं कि $x \to a$ का अर्थ है कि x के मान a के बहुत निकट हैं जो a से बड़े अथवा छोटे हैं। उस स्थिति में जब x के मान a से छोटे तथा a के बहुत निकट हैं तो हम कहते हैं कि x, बाईं ओर से x की ओर अग्रसर है तथा इसे हम $x \to a^-$ के रूप में लिखते हैं। इसी प्रकार x के मान जो a से बड़े तथा a के बहुत निकट हैं तो हम कहते हैं कि x दाईं ओर से a की ओर अग्रसर है तथा उसे हम $x \to a^+$ के रूप में लिखते हैं।

अत: यदि एक फलन $f(x)$ एक सीमा l_1 की ओर अग्रसर है, जब x 'a' की ओर बायें से उपगमन करता है, तो हम कहते हैं कि $f(x)$ की बाईं पक्ष सीमा जब $x \to a$, l_1 है। हम उसे इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell_1 \quad \text{अथवा} \quad \lim_{h\to 0} f(a-h) = \ell_1, h>0$$

इसी प्रकार x के दायें से a की ओर अग्रसर होने पर यदि $f(x)$ एक सीमा l_2 की ओर अग्रसर हो, तो हम कहते हैं कि $f(x)$ की दाईं पक्ष सीमा जब $x \to a; l_2$ है। हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell_2 \quad \text{अथवा} \quad \lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell_2, h>0$$

कार्यकारी नियम :

दाईं पक्ष सीमा ज्ञात करना	बाईं पक्ष सीमा ज्ञात करना
$\lim_{x\to a^+} f(x)$	$\lim_{x\to a^-} f(x)$
$x = a+h$ रखिए	$x = a-h$ रखिए
$\lim_{h\to 0} f(a+h)$ ज्ञात कीजिए	$\lim_{h\to 0} f(a-h)$ ज्ञात कीजिए

टिप्पणी : ध्यान रहे दोनों अवस्थाओं में h के मान धनात्मक होंगे।

25.3 फलन y = f (x) की x = a पर सीमा

आइए एक उदाहरण लें :

$\lim_{x\to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = x^2+5x+3$

यहाँ
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 0}\left[(1+h)^2+5(1+h)+3\right] = \lim_{h\to 0}\left[1+2h+h^2+5+5h+3\right]$$

$$= 1+5+3 = 9 \qquad .....(i)$$

तथा $$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{h\to0}\left[(1-h)^2+5(1-h)+3\right]$$

$$= \lim_{x\to0}\left[1-2h+h^2+5-5h+3\right]$$

$$=1+5+3=9 \qquad .....(ii)$$

(i) तथा (ii) से, $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x)$

आइए एक अन्य उदाहरण लें :

मान ज्ञात कीजिए : $\lim_{x\to3} \frac{|x-3|}{x-3}$

यहाँ $$\lim_{x\to3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{h\to0} \frac{|(3+h)-3|}{[(3+h)-3]} = \lim_{h\to0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{h}{h} \qquad \text{(क्योंकि } h>0, \text{ अत: } |h| = h)$$

$$=1 \qquad .....(iii)$$

तथा $$\lim_{x\to3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{h\to0} \frac{|(3-h)-3|}{[(3-h)-3]} = \lim_{h\to0} \frac{|-h|}{-h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{h}{-h} \qquad \text{(क्योंकि } h > 0, \text{ अत: } |-h| = h)$$

$$=-1 \qquad .....(iv)$$

अत: (iii) तथा (iv) से, $\lim_{x\to3^+} \frac{|x-3|}{x-3} \neq \lim_{x\to3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$

अत: प्रथम उदाहरण में बाईं पक्ष सीमा = दाईं पक्ष सीमा जबकि दूसरे उदाहरण में

बाईं पक्ष सीमा $\neq$ दाईं पक्ष सीमा

अत: बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा सदा समान नहीं होते। अत: हम इस नतीजे पर पहुँचे हैं कि $\lim_{x\to1}(x^2+5x+3)$ का अस्तित्व है (जो 9 के बराबर है) तथा $\lim_{x\to3} \frac{|x-3|}{x-3}$ का अस्तित्व नहीं है।

टिप्पणी:

I $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ तथा $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

II $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell_1$ तथा $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell_2$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं.

III $\lim_{x\to a^+} f(x)$ या $\lim_{x\to a^-} f(x)$ का अस्तित्व नहीं $\Rightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व नहीं

25.4 सीमाओं पर आधारभूत प्रमेय

1. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$ जहाँ c एक अचर है

इसको सत्यापित करने के लिए माना $f(x) = 5x$

हम देखते हैं कि $\lim_{x\to 2} 5x$ में 5 एक अचर है तथा सीमा से बेअसर है

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2} 5x = 5\lim_{x\to 2} x = 5\times 2 = 10$$

2. $\lim_{x\to a}\left[g(x)+h(x)+p(x)+....\right] = \lim_{x\to a} g(x)+\lim_{x\to a} h(x)+\lim_{x\to a} p(x)+........$

जहाँ $g(x), h(x), p(x), ...$ कोई फलन हैं

3. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$

इसे सत्यापित करने के लिए माना

$$f(x) = 5x^2+2x+3$$

तथा $$g(x) = x+2.$$

तब $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(5x^2+2x+3\right)$$

$$= 5\lim_{x\to 0} x^2 + 2\lim_{x\to 0} x + 3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = \lim_{x\to 0} x + 2 = 2$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}(5x^2+2x+3)\lim_{x\to 0}(x+2) = 3.2 = 6 \qquad .....(i)$$

फिर $$\lim_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to 0}[(5x^2+2x+3)(x+2)]$$

$$= \lim_{x\to 0}(5x^3+12x^2+7x+6)$$

$$= 5\lim_{x\to 0} x^3 + 12\lim_{x\to 0} x^2 + 7\lim_{x\to 0} x + 6$$

$$= 6 \qquad .....(ii)$$

(i) तथा (ii) से,

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x\to 0} f(x)\lim_{x\to 0} g(x)$$

4. $\lim_{x\to a}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, जबकि $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

इसे सत्यापित करने के लिए माना $f(x)=x^2+5x+6$ और $g(x)=x+2$

हमें मिलता है $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+5x+6)=(-1)^2+5(-1)+6$

$$=1-5+6=2$$

तथा $\lim\limits_{x\to -1}(x+2)=-1+2=1$

$$\therefore \quad \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+5x+6)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+2)}=\frac{2}{1}=2 \qquad \text{.....(i)}$$

और
$$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+5x+6)}{x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(x+2)}{x+2}\left[\begin{array}{l}\because x^2+5x+6\\ =x^2+3x+2x+6\\ =x(x+3)+2(x+3)\\ =(x+3)(x+2)\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to -1}(x+3)$$

$$=-1+3=2 \qquad \text{.....(ii)}$$

$\therefore$ (i) तथा (ii) से,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+5x+6\right)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+2)}$$

अर्थात्
$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to -1}f(x)}{\lim\limits_{x\to -1}g(x)}$$

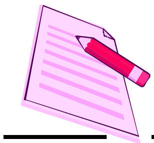
हम ने ऊपर देखा कि दिये हुए दो फलनों को अनेक विधियों से मिला कर नया फलन बनाया जा सकता है। इस संयोजित फलन की सीमा जब $x\to a$, की गणना दिए हुए फलनों की सीमा से की जा सकती है। अन्त में, हम सीमा पर कुछ आधारभूत परिणामों का वर्णन नीचे करेंगे जिन का आधारभूत संक्रियाओं से संयोजित फलनों की सीमाएं ज्ञात करने में उपयोग किया जा सकता है।

यदि $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$ तथा $\lim\limits_{x\to a}g(x)=m$ हो, तो

(i) $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\lim\limits_{x\to a}f(x)=k\ell$ जहाँ k एक अचर है

(ii) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell\pm m$

(iii) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell\cdot m$



(iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$, जबकि $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

उपरोक्त परिणाम दो से अधिक फलनों पर भी लागू होते हैं।

उदाहरण 25.1. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

हल :
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = (x+1) \qquad [\because x \neq 1]$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

टिप्पणी : $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x = 1$ पर परिभाषित नहीं है। $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ का मान $f(x)$ के $x = 1$ मान से स्वतंत्र है।

उदाहरण 25.2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(x^2 + 2x + 4\right) \qquad [\because x \neq 2]$$

$$= 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 12$$

उदाहरण 25.3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3-x} - 1}{2 - x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : अंश का परिमेयकरण करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{\sqrt{3-x} - 1}{2 - x} = \frac{\sqrt{3-x} - 1}{2 - x} \times \frac{\sqrt{3-x} + 1}{\sqrt{3-x} + 1} = \frac{3 - x - 1}{(2-x)\left(\sqrt{3-x} + 1\right)}$$

$$= \frac{2 - x}{(2-x)\left(\sqrt{3-x} + 1\right)}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{(2-x)\left(\sqrt{3-x} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\left(\sqrt{3-x} + 1\right)} \qquad [\because x \neq 2]$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{3-2}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 25.4. मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{12-x}-x}{\sqrt{6+x}-3}$$

हल : अंश तथा हर का परिमेयकरण करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{12-x}-x}{\sqrt{6+x}-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{12-x}-x\right)\left(\sqrt{12-x}+x\right)\cdot\left(\sqrt{6+x}+3\right)}{\left(\sqrt{6+x}-3\right)\left(\sqrt{6+x}+3\right)\left(\sqrt{12-x}+x\right)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\left(12-x-x^2\right)}{6+x-9} \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{6+x}+3}{\sqrt{12-x}+x}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-(x+4)(x-3)}{(x-3)} \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{6+x}+3}{\sqrt{12-x}+x}$$

$$= -(3+4)\cdot\frac{6}{6} = -7 \qquad [\because x \neq 3]$$

टिप्पणी: जब कभी किसी फलन के अंश और हर दोनों की सीमांए शून्य हों तो आप फलन का ऐसा सरलीकरण करें कि परिणामी फलन का हर शून्येतर हो। यदि हर की सीमा 0 है तथा अंश की सीमा शून्येतर है, तो फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं होता।

उदाहरण 25.5. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, यदि उसका अस्तित्व है, तो ज्ञात करें।

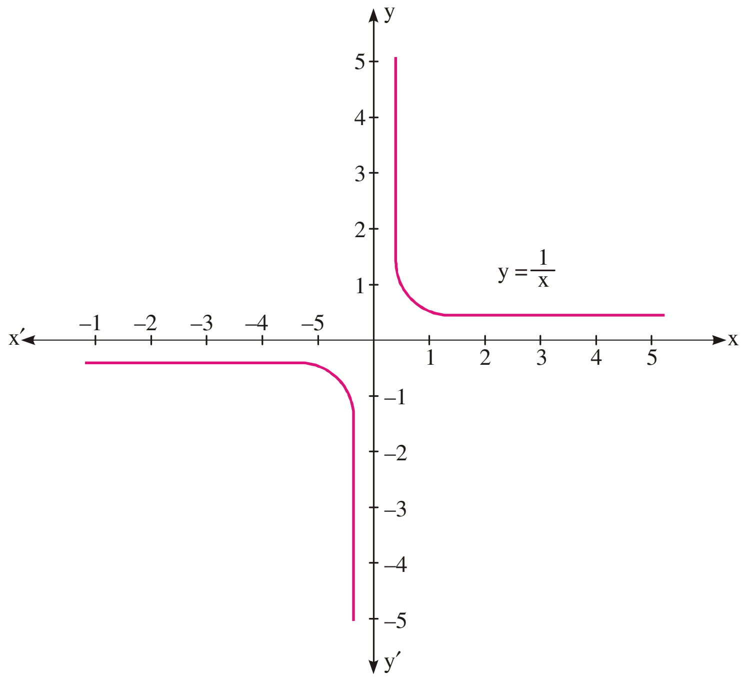
हल : हम x के वह मान चुनते हैं जो दोनों ओर से 0 की ओर अग्रसर होते हैं।

हम $\frac{1}{x}$ के संगत मानों की तालिका बनाते हैं

x	-0.1	$-.01$	$-.001$	$-.0001$
$\frac{1}{x}$	-10	-100	-1000	-10000

x	0.1	.01	.001	.0001
$\frac{1}{x}$	10	100	1000	10000

हम देखते हैं कि जैसे $x \to 0$ तो $\frac{1}{x}$ के मान किसी संख्या की ओर अग्रसर नहीं होते। अतः $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ का अस्तित्व नहीं है जैसा कि चित्र 25.2 में दिखाया गया है।



चित्र 25.2

उदाहरण 25.6. मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \to 0} (|x| + |-x|)$$

हल : क्योंकि |x| के मान $x \geq 0$ तथा $x < 0$ के लिए भिन्न हैं, हमें दोनों बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा ज्ञात करनी पड़ेंगी।

$$\lim_{x \to 0^-} (|x| + |-x|) = \lim_{h \to 0} (|0 - h| + |-(0 - h)|)$$

$$= \lim_{h \to 0} (|-h| + |-(-h)|)$$

$$= \lim_{h \to 0} h + h = \lim_{h \to 0} 2h = 0 \qquad \text{...(i)}$$

तथा $$\lim_{x \to 0^+} (|x| + |-x|) = \lim_{h \to 0} (|0 + h| + |-(0 + h)|)$$

$$= \lim_{x \to 0} h + h = \lim_{h \to 0} 2h = 0 \qquad \text{...(ii)}$$

(i) तथा (ii) से,

$$\lim_{x \to 0^-} (|x| + |-x|) = \lim_{h \to 0^+} [|x| + |-x|]$$

अत: $$\lim_{h \to 0} [|x| + |-x|] = 0$$

टिप्पणी: हमें याद रखना चाहिए कि हम बाईं पक्ष तथा दाईं पक्ष सीमा का प्रयोग विशेषतया तब करते हैं जब (a) दिया गया फलन मापांक फलन है तथा (b) फलन एक से अधिक नियम द्वारा परिभाषित है।

उदाहरण 25.7. a का मान ज्ञात कीजिए कि

$\lim_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है जहाँ $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & , x \le 1 \\ 2x+a, & x > 1 \end{cases}$

हल :
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (3x+5) \qquad [\because f(x) = 3x+5,\ x \le 1 \text{ के लिए}]$$

$$= \lim_{h \to 0} [3(1-h)+5]$$

$$= 3 + 5 = 8 \qquad .....(i)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x+a) \qquad [\because f(x) = 2x+a,\ x > 1 \text{ के लिए}]$$

$$= \lim_{h \to 0} (2(1+h)+a)$$

$$= 2 + a \qquad .....(ii)$$

हमें दिया है कि $\lim_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है यदि

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

(i) तथा (ii) से,

$$2 + a = 8$$

$\therefore$ अथवा $a = 6$

उदाहरण 25.8. यदि फलन $f(x)$ इस प्रकार परिभाषित है कि

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad x = \frac{1}{2} \\ x-1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ के अस्तित्व का परीक्षण कीजिए।

हल : यहाँ
$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x < \frac{1}{2} & .....(i) \\ 0 & , \quad x = \frac{1}{2} \\ x-1, & \frac{1}{2} < x \le 1 & .....(ii) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2} - h\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{2} - h\right) \qquad \left[\because \frac{1}{2} - h < \frac{1}{2} \text{ तथा (i) से, } f\left(\frac{1}{2} - h\right) = \frac{1}{2} - h\right]$$

$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \qquad \text{.....(iii)}$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2} + h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\left(\frac{1}{2} + h\right) - 1\right] \qquad \left[\because \frac{1}{2} + h > \frac{1}{2} \text{ तथा (ii) से, } f\left(\frac{1}{2} + h\right) = \left(\frac{1}{2} + h\right) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2} \qquad \text{.....(iv)}$$

(iii) तथा (iv) से, बाईं पक्ष सीमा $\neq$ दाईं पक्ष सीमा

अतः $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

देखें आपने कितना सीखा 25.1

1. निम्न में से प्रत्येक सीमा ज्ञात कीजिए:

 (a) $\lim_{x \to 2}[2(x+3)+7]$ (b) $\lim_{x \to 0}\left(x^2+3x+7\right)$ (c) $\lim_{x \to 1}\left[(x+3)^2-16\right]$

 (d) $\lim_{x \to -1}\left[(x+1)^2+2\right]$ (e) $\lim_{x \to 0}\left[(2x+1)^3-5\right]$ (f) $\lim_{x \to 1}(3x+1)(x+1)$

2. निम्न फलनों में प्रत्येक की सीमा ज्ञात कीजिए :

 (a) $\lim_{x \to 5}\frac{x-5}{x+2}$ (b) $\lim_{x \to 1}\frac{x+2}{x+1}$ (c) $\lim_{x \to -1}\frac{3x+5}{x-10}$

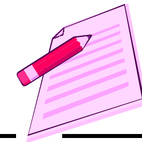
 (d) $\lim_{x \to 0}\frac{px+q}{ax+b}$ (e) $\lim_{x \to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ (f) $\lim_{x \to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$

 (g) $\lim_{x \to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$ (h) $\lim_{x \to \frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{3x-1}$

3. निम्न में प्रत्येक सीमा ज्ञात कीजिए :

 (a) $\lim_{x \to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ (b) $\lim_{x \to 0}\frac{x^3+7x}{x^2+2x}$ (c) $\lim_{x \to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$

 (d) $\lim_{x \to 1}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right]$



4. निम्न सीमाओं में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3+x} - \sqrt{6}}{x-3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$ (e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2} - x}{2 - \sqrt{6-x}}$

5. (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x}$, यदि उसका अस्तित्व है, ज्ञात कीजिए।

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$, यदि उसका अस्तित्व है, ज्ञात कीजिए।

6. निम्न सीमाओं को ज्ञात कीजिए :

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{5-|x|}$ (b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x+2|}$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x-2|}$

(d) दर्शाइए कि $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$ का अस्तित्व नहीं है।

7. (a) निम्न फलनों की बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x \le 1 \\ 3x-5, & x > 1 \end{cases} \text{ जबकि } x \to 1$$

(b) यदि $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

(c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$, यदि उसका अस्तित्व है, ज्ञात कीजिए जब $f(x) = \begin{cases} 4x+3, & x < 4 \\ 3x+7, & x \ge 4 \end{cases}$

8. 'a' का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ का अस्तित्व है, जहाँ $f(x) = \begin{cases} ax+5, & x < 2 \\ x-1, & x \ge 2 \end{cases}$

9. माना $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ तो $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ के अस्तित्व का परीक्षण कीजिए।

10. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, यदि उसका अस्तित्व है, तो ज्ञात कीजिए जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

25.5 कुछ विशेष फलनों की सीमा ज्ञात करना

(i) सिद्ध कीजिए कि (a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

उपपत्ति :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{a+h-a}\text{s}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(a^n+n\,a^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h^2+.....+h^n\right)-a^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(n\,a^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h+.....+h^{n-1}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[n\,a^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h+.....+h^{n-1}\right]$$

$$=n\,a^{n-1}+0+0+.....+0$$

$$=n\,a^{n-1}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\cdot a^{n-1}$$

टिप्पणीः यह परिणाम सभी n के लिए भी सत्य है

(ii) सिद्ध कीजिए कि (a) $\lim\limits_{x\to 0}\ \sin x=0$ तथा (b) $\lim\limits_{x\to 0}\ \cos x=1$

उपपत्ति : एक इकाई वृत्त लीजिए जिसका केन्द्र B है

तथा जिसमें C पर समकोण है तथा $\angle ABC=x$ रेडियन है

अब $\sin x=AC$ तथा $\cos x=BC$

जैसे–जैसे x घटता है वैसे–वैसे A,C के पास होता जाता है

अर्थात $x\to 0, A\to C$

अथवा $x\to 0, AC\to 0$ तथा $BC\to AB$

($\because$ वृत्त की त्रिज्या 1 है)

$\therefore \sin x\to 0$ तथा $\cos x\to 1$

इस प्रकार हमें मिलता है $\lim\limits_{x\to 0}\ \sin x=0$ तथा $\lim\limits_{x\to 0}\ \cos x=1$

(iii) सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

उपपत्ति : एक इकाई त्रिज्या का वृत्त लीजिए जिसका केन्द्र मूल बिन्दु O पर है। माना वृत्त पर एक बिन्दु B (1, 0) है तथा A, वृत्त पर एक अन्य बिन्दु है। $AC \perp OX$ बनाइए।

माना $\angle AOX = x$ रेडियन, जहाँ $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

वृत्त के बिन्दु B पर एक स्पर्श रेखा खींचिए, जो बढ़ाई गई OA को D पर मिलती है। अतः $BD \perp OX$

ΔAOC का क्षेत्रफल < त्रिज्यखंड OBA का क्षेत्रफल < ΔOBD का क्षेत्रफल

अथवा $\dfrac{1}{2} OC \times AC < \dfrac{1}{2} x (1)^2 < \dfrac{1}{2} OB \times BD$

[क्योंकि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई तथा एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \theta r^2$]

$$\therefore \qquad \frac{1}{2}\cos x \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

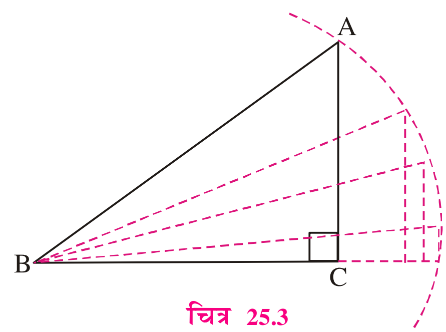
$$\left[\because \ \cos x = \frac{OC}{OA}, \sin x = \frac{AC}{OA} \text{ और } \tan x = \frac{BD}{OB}, OA = 1 = OB\right]$$

अथवा $\cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{\tan x}{\sin x}$ [$\dfrac{1}{2}\sin x$ से भाग देने पर]

अर्थात $\qquad \cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

अर्थात $\qquad \dfrac{1}{\cos x} > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

अथवा $\qquad \cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}$



चित्र 25.3

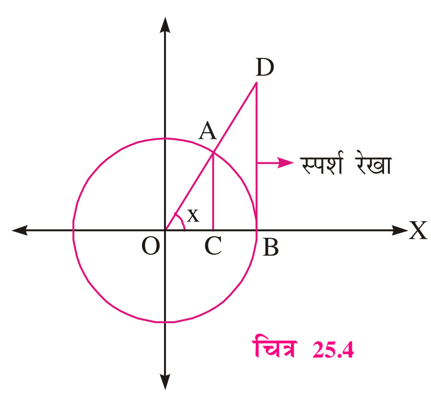
सीमा लेने पर, जब $x \to 0$ हमें मिलता है

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

अर्थात $\quad 1 < \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} < 1 \qquad \left[\because \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \text{ तथा } \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1} = 1\right]$

अतः $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

टिप्पणी : उपरोक्त परिणाम में स्मरण रखिये कि कोण x रेडियन में व्यक्त है।



चित्र 25.4

(iv) सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

उपपत्ति : द्विपद प्रमेय से, जब $|x| < 1$ तो हमें मिलता है

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[1+\frac{1}{x}\cdot x+\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{2!}x^2++\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)}{3!}x^3+\text{..........}\infty\right]$$

$$=\left[1+1+\frac{(1-x)}{2!}+\frac{(1-x)(1-2x)}{3!}+\text{..........}\infty\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+1+\frac{1-x}{2!}+\frac{(1-x)(1-2x)}{3!}+\text{..........}\infty\right]$$

$$=\left[1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\text{..........}\infty\right]$$

$$=e \qquad \text{(परिभाषा से)}$$

अत: $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

(v) सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$

उपपत्ति : $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x)=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x}$$

$$=\log e \qquad \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ के प्रयोग से}\right)$$

$$=1$$

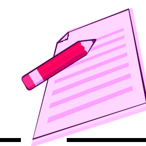
(vi) सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $e^x=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\text{..........}\right)$

$$\therefore \quad e^x-1=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\text{..........}-1\right)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\text{..........}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{e^x-1}{x}=\frac{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\text{..........}\right)}{x} \qquad \text{[दोनों पक्षों को } x \text{ से भाग देने पर]}$$

$$=\frac{x\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\text{..........}\right)}{x}$$



$$= \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\dots\dots\right)$$

$$\therefore \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0}\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots\dots\dots\right)$$

$$= 1 + 0 + 0 + \dots\dots = 1$$

अतः $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

उदाहरण 25.9. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .....(i)

$\therefore$ (i) में x के स्थान पर $-x$ रखने पर हमें मिलता है

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1 \qquad \text{.....(ii)}$$

दी गई सीमा को लिख सकते हैं

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - e^{-x}}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x}$$

$= 1 + 1$ $\qquad$ [(i) तथा (ii) के प्रयोग से]

$= 2$

अतः $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$

उदाहरण 25.10. $\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $x = 1 + h$ जहाँ $h \to 0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{1+h} - e}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^1 \cdot e^h - e}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e(e^h - 1)}{h} = e \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e \times 1 = e.$$

अत: $$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} = e$$

उदाहरण 25.11. मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

हल : $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3$$ (3 से गुणा तथा भाग देने पर)

$$= 3 \lim_{3x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$ [$\because$ जब $x \to 0$ तो $3x \to 0$]

$$= 3.1 \qquad \left[\because \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right]$$

$$= 3$$

अत: $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

उदाहरण 25.12. मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$$

हल : $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2} \qquad \left[\begin{array}{l} \because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \\ \therefore 1-\cos 2x = 2\sin^2 x \\ \text{or } 1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \times \frac{x}{2}}\right)^2$$ (हर को 2 से गुणा तथा भाग देने पर)

$$= \frac{1}{4} \lim_{\frac{x}{2}\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$\therefore \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2} = \frac{1}{4}$

उदाहरण 25.13. मान ज्ञात कीजिए : $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 6\theta}$

हल : $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 6\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{2\sin^2 2\theta}{2\sin^2 3\theta}$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2\theta\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3\theta}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\frac{4\theta^2}{9\theta^2}$$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)\lim_{2\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2 \lim_{3\theta\to 0}\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2$$

$$= \frac{4}{9}\times 1\times 1 = \frac{4}{9}$$

उदाहरण 25.14. मान ज्ञात कीजिए : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$

हल : $x = \frac{\pi}{2}+h$ लीजिए जब $x \to \frac{\pi}{2}, h \to 0$

$\therefore \qquad 2x = \pi + 2h$

$\therefore \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{[\pi-(\pi+2h)]^2}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+\cos(\pi+2h)}{4h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos 2h}{4h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 h}{4h^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{(\pi - 2x)^2} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 25.15. मान ज्ञात कीजिए : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin a\,x}{\tan b\,x}$

हल : $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin a\,x}{\tan b\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin a\,x}{ax} \times a}{\frac{\tan bx}{bx} \times b} = \frac{a}{b} \frac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin a\,x}{ax}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan b\,x}{bx}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

देखें आपने कितना सीखा 25.2

1. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

2. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{-x} - e^{-1}}{x - 1}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e - e^{x}}{x - 1}$

3. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{5x^2}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{x}$ (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin a\,x}{\sin b\,x}$

4. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 8x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{x^3}$

   (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3 \tan^2 x}$

5. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos a\,x}{1 - \cos b\,x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 \cot x}{1 - \cos x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$

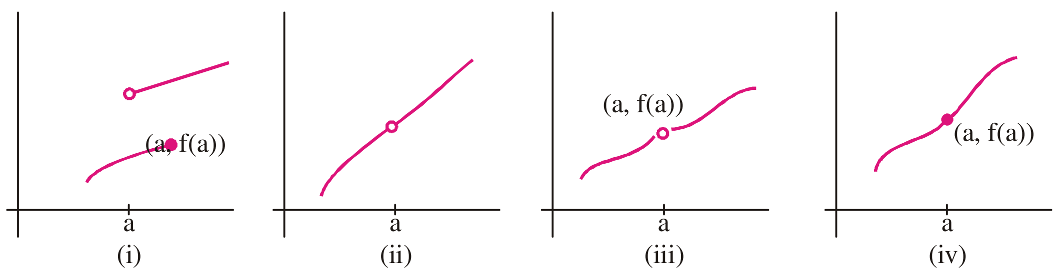
6. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - x}$ (c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

7. निम्न में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x}$ (b) $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\tan 7\theta}{\sin 4\theta}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{4x - \tan 5x}$

25.6 किसी बिन्दु पर एक फलन का सांतत्य



चित्र 25.5

आइये एक फलन के उपरोक्त आलेखों का प्रेक्षण करें :

आलेख (iv) को हम बिना पैंसिल उठाये आलेखित कर सकते हैं लेकिन आलेखों (i),(ii) तथा (iii) में, पूरा आलेख खींचने के लिए हमें पैंसिल को उठाना ही पड़ेगा।

स्थिति (iv) के लिए हम कहते हैं कि $x = a$ पर फलन सतत है। अन्य तीन स्थितियों में $x = a$ पर फलन सतत नहीं है, अर्थात वह $x = a$ पर असतत है।

स्थिति (i) में, $x = a$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

स्थिति (ii) में, सीमा का अस्तित्व है लेकिन $x = a$ पर फलन परिभाषित नहीं है।

स्थिति (iii) में, सीमा का अस्तित्व है, लेकिन वह फलन का $x = a$ के मान के बराबर नहीं है।

स्थिति (iv) में, सीमा का अस्तित्व है तथा वह फलन का $x = a$ के मान के बराबर भी है।

उदाहरण 25.16. फलन $f(x) = x - a$ का $x = a$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हल : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h \to 0}[(a+h) - a]$

$= 0$ .....(i)

तथा $f(a) = a - a = 0$ .....(ii)

(i) तथा (ii) से, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

अतः $x = a$ पर फलन $f(x)$ सतत है।

उदाहरण 25.17. दर्शाइए कि $f(x)=c$ सतत है।

हल : अचर फलन $f(x)=c$ का प्रांत R है। माना 'a' एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है।

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ तथा $f(a)=c$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$\therefore$ $x=a$ पर $f(x)$ सतत् है। परन्तु a स्वेच्छ है, अतः $f(x)=c$ एक सतत फलन है।

उदाहरण 25.18. दर्शाइए कि $f(x)=cx+d$ एक सतत फलन है।

हल : फलन $f(x)=cx+d$ का प्रांत R है तथा माना a एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है।

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)$$

$$=\lim_{h\to a}[c\ (a+h)+d]$$

$$=ca+d \qquad .....(i)$$

तथा $\quad f(a)=ca+d \qquad .....(ii)$

(i) तथा (ii) से, $\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

अतः $x=a$ पर $f(x)$ सतत है

क्योंकि a स्वेच्छ है, अतः $f(x)$ एक सतत फलन है।

उदाहरण 25.19. सिद्ध कीजिए कि $f(x)=\sin x$ एक सतत फलन है।

हल : $f(x)=\sin x$

$\sin x$ का प्रांत R है। माना 'a' एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\sin(a+h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\ [\sin a.\cos h+\cos a.\sin h]$$

$$=\sin a\lim_{h\to 0}\cos h+\cos a\lim_{h\to 0}\sin h \qquad \left[\because \lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x) \text{ जहाँ } k \text{ एक अचर है}\right]$$

$$=\sin a\times 1+\cos a\times 0 \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\sin x=0 \text{ और } \lim_{x\to 0}\cos x=1\right]$$

$$=\sin a \qquad .....(i)$$

तथा $f(a)=\sin a \qquad .....(ii)$

(i) तथा (ii) से, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\therefore \sin x,\ x=a$ पर सतत है

$\because \sin x,\ x=a$ पर सतत है तथा x एक स्वेच्छ बिन्दु है।

इसलिए $f(x) = \sin x$ सतत है।

परिभाषा :

1. एक फलन $f(x)$ एक खुले अन्तराल]a,b[में सतत है यदि वह]a,b[* के प्रत्येक बिन्दु पर सतत है।

2. एक फलन $f(x)$,एक बन्द अन्तराल [a,b] में सतत है यदि यह]a,b[के प्रत्येक बिन्दु पर सतत है तथा यह बिन्दु a पर दायें से तथा 'b' पर बायें से सतत है।

अर्थात $$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

तथा $$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

* *खुले अन्तराल]a, b[में हम अन्त बिन्दु a तथा b नहीं लेते।*

देखें आपने कितना सीखा 25.3

1. निम्न फलनों की सततता का परीक्षण कीजिए :

   (a) $f(x) = x - 5, x = 2$ पर (b) $f(x) = 2x + 7, x = 0$ पर

   (c) $f(x) = \frac{5}{3}x + 7, x = 3$ पर (d) $f(x) = px + q, x = -q$ पर

2. दर्शाइए कि फलन $f(x) = 2a + 3b$ सतत है जहाँ a तथा b अचर हैं।

3. दर्शाइए कि फलन $5x + 7$ सतत है

4. (a) दर्शाइए कि $\cos x$ एक सतत फलन है

   (b) दर्शाइए कि $\cot x$ अपने प्रांत के सभी बिन्दुओं पर सतत है।

5. निम्न फलनों में अचरों के मान ज्ञात कीजिए:

   (a) $f(x) = px - 5$ तथा $f(2) = 1$ जबकि $x = 2$ पर $f(x)$ सतत है

   (b) $f(x) = a + 5x$ तथा $f(0) = 4$ इस प्रकार है कि $x = 0$ पर $f(x)$ सतत है

   (c) $f(x) = 2x + 3b$ तथा $f(-2) = \frac{2}{3}$ जबकि $f(x), x = -2$ पर सतत है

25.7 एक बिन्दु पर फलन का सांतत्य अथवा असांतत्य

अब तक हमने केवल उन्हीं फलनों पर विचार किया है जो सतत हैं। अब हम कुछ ऐसे उदाहरणों की चर्चा करेंगे जिनमें दिये गए फलन सतत हो सकते है अथवा नहीं।

उदाहरण 25.20. दर्शाइए कि फलन $f(x) = e^x$ एक सतत फलन है।

हल : e^x का प्रांत R है। माना $a \in R$ जहां a एक स्वेच्छ है

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$ जबकि h एक बहुत छोटी संख्या है।

$$= \lim_{h \to 0} e^{a+h} = \lim_{h \to 0} e^a \cdot e^h = e^a \lim_{h \to 0} e^h$$

$$= e^a \times 1$$

$$= e^a \qquad .....(i)$$

साथ ही, $f(a) = e^a$ .....(ii)

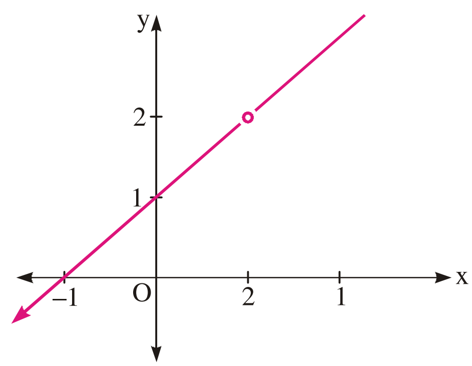
$\therefore$ (i) तथा (ii) से , $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ f (x), x = a पर सतत है।

क्योंकि a एक स्वेच्छ है, e^x एक सतत फलन है।

उदाहरण 25.21. फलन $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ के आलेख से इसके सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल : फलन का आलेख (चित्र 25.6) में दिया गया है। फलन असतत है क्योंकि $x = 1$ पर आलेख में एक असतता (अंतराल) है।



चित्र 25.6

देखें आपने कितना सीखा 25.4

1. (a) दर्शाइए कि $f(x) = e^{5x}$ एक सतत फलन है।

   (b) दर्शाइए कि $f(x) = e^{\frac{-2}{3}x}$ एक सतत फलन है।

   (c) दर्शाइए कि $f(x) = e^{3x+2}$ एक सतत फलन है।

   (d) दर्शाइए कि $f(x) = e^{-2x+5}$ एक सतत फलन है।

2. आलेख द्वारा, निम्न फलनों में से प्रत्येक के सांतत्य का परीक्षण कीजिए :

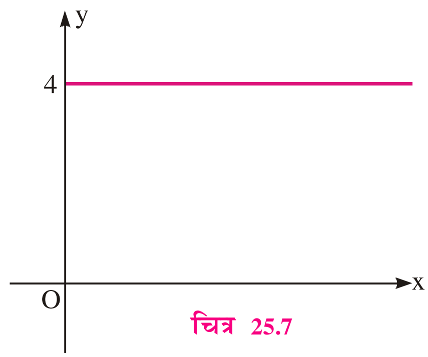
   (a) $f(x) = x+1$. (b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ (d) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$

25.8 सतत फलनों के गुण धर्म

(i) फलन $f(x)=4$ पर विचार करें। फलन $f(x)=4$ का आलेख चित्र 25.7 में दिखाया गया है। आलेख से हम देखते हैं कि फलन सतत है। साधारणतया सभी अचर फलन सतत हैं।

(ii) यदि कोई फलन सतत है, तो उस फलन का अचर गुणज भी सतत है। आइए फलन $f(x)=\dfrac{7}{2}x$ पर विचार करें। हम जानते हैं कि $\dfrac{7}{2}$ एक अचर फलन है, इसलिए यह सतत है। x भी सतत फलन है



चित्र 25.7

अब

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} \frac{7}{2}(a+h)$$

$$=\frac{7}{2}a \qquad .....(i)$$

तथा $$f(a)=\frac{7}{2}a \qquad .....(ii)$$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{7}{2}x$, $x=a$ पर एक सतत फलन है

यदि $x=a$ पर $\dfrac{7}{2}$ तथा x सतत् फलन हैं तो $\dfrac{7}{2}x$ भी $x=a$ पर सतत फलन है।

(iii) फलन $f(x)=x^2+2x$ पर विचार करें। हम जानते हैं कि x^2 तथा $2x$ दोनों सतत हैं

अब $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h),\ h>0$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(a+h)^2+2(a+h)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[a^2+2ah+h^2+2a+2ah\right]$$

$$=a^2+2a \qquad .....(i)$$

तथा $$f(a)=a^2+2a \qquad .....(ii)$$

(i) तथा (ii) से, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\therefore$ f(x), $x = a$ पर सतत है।

अत: हम कहते हैं कि $x=a$ पर x^2 तथा $2x$ दो सतत फलन हैं, तो $\left(x^2+2x\right)$ भी $x=a$ पर सतत है।

(iv) फलन $f(x)=(x^2+1)(x+2)$ पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि (x^2+1) तथा $(x+2)$ दो सतत फलन हैं

तथा $$f(x)=(x^2+1)(x+2)$$

$$=x^3+2x^2+x+2$$

क्योंकि $x^3, 2x^2, x$ तथा 2 सतत फलन हैं, इसलिए x^3+2x^2+x+2 भी एक सतत फलन है

हम कहते हैं कि यदि (x^2+1) तथा $(x+2)$ दो सतत फलन हैं, तो $(x^2+1)(x+2)$ भी एक सतत फलन है

(v) फलन $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ को $x=2$ पर विचार कीजिये। हम जानते हैं कि $x^2-4, x=2$ पर सतत फलन है। $(x+2)$ भी $x=2$ पर सतत है

तथा $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x-2)$$

$$=2-2=0$$

तथा $$f(2)=\frac{(2)^2-4}{2+2}$$

$$=\frac{0}{4}=0$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. अतः $f(x)$, $x=2$ पर सतत है

यदि $x=2$ पर (x^2+4) तथा $(x+2)$ दो सतत फलन हैं, तो $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ भी $x=2$ पर सतत है।

(vi) फलन $f(x)=|x-2|$ पर विचार करें। इस फलन को हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$f(x)=\begin{cases}-(x-2), x<2\\ (x-2), x\geq 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{h\to 0} f(2-h), \ h>0$$

$$=\lim_{h\to 0}[(2-h)-2]$$

$$=2-2=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{h\to 0} f(2+h), \ h>0 \qquad \text{......(i)}$$

$$=\lim_{x\to 0}[(2+h)-2]$$

$$=2-2=0 \qquad \text{.....(ii)}$$

और $$f(2)=(2-2)=0 \qquad .....(iii)$$

(i), (ii) तथा (iii) से, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=f(2)$

अतः $|x-2|$, $x=2$ पर सतत है।

उपरोक्त परिणामों से हम सतत फलनों के कुछ गुणधर्मों को नीचे दे रहे हैं:

यदि $f(x)$ तथा $g(x)$, $x=a$ पर दो सतत फलन हैं, तो

(i) $C\,f(x)$, $x=a$ पर सतत फलन है जहाँ C एक अचर है

(ii) $f(x) \pm g(x)$, $x=a$ पर सतत है

(iii) $f(x) \cdot g(x)$, $x=a$ पर सतत है

(iv) $f(x)/g(x)$, $x=a$ पर सतत है जहाँ $g(a) \neq 0$

(v) $|f(x)|$, $x=a$ पर सतत है

टिप्पणी: प्रत्येक अचर फलन सतत है

25.9 सातंत्य पर कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

उपरोक्त चर्चित गुणों का प्रयोग करते हुए हम सांतत्य पर कुछ परिणामों की चर्चा करेंगे।

(i) फलन $f(x)=px+q, x \in R$ (i)

इस फलन का प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। मान लें R में a एक स्वेच्छ वास्तविक संख्या है

(i) के दोनों पक्षों की सीमा लेने पर हमें मिलता है

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (px+q) = pa+q$$

$$= px+q \text{ का } x=a \text{ पर मान}$$

$\therefore$ $x=a$ पर $px+q$ सतत है

इसी प्रकार यदि $f(x)=5x^2+2x+3$ पर विचार करें, तो हम दर्शा सकते हैं कि यह सतत फल्न है।

व्यापक रूप में यदि, $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

जहां $a_0, a_1, a_2 .....a_n$ अचर हैं तथा n ऋणेतर पूर्णांक है

हम दर्शा सकते हैं कि बिन्दु $x=c$ (जहां c कोई वास्तविक संख्या है) पर सभी $a_0, a_1x, a_2x^2, ...a_nx^n$ सतत हैं और गुण (i) से उन के योगफल भी $x=c$ पर सतत है।

$\therefore$ किसी बिन्दु c पर $f(x)$ सतत फलन है।

अतः प्रत्येक बहुपद फलन प्रत्येक बिन्दु पर सतत है।

(ii) फलन $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-5)}$ पर विचार करें।

$f(x)$ परिभाषित नहीं है जब $x-5=0$ अर्थात $x=5$ है। चूंकि $(x+1)$ तथा $(x+3)$ दोनों सतत हैं, $(x + 1)(x + 3)$ भी सतत है [गुण (iv) का प्रयोग करने पर]

$\therefore$ फलन का अंश सतत है,

$(x-5)$ भी सतत है

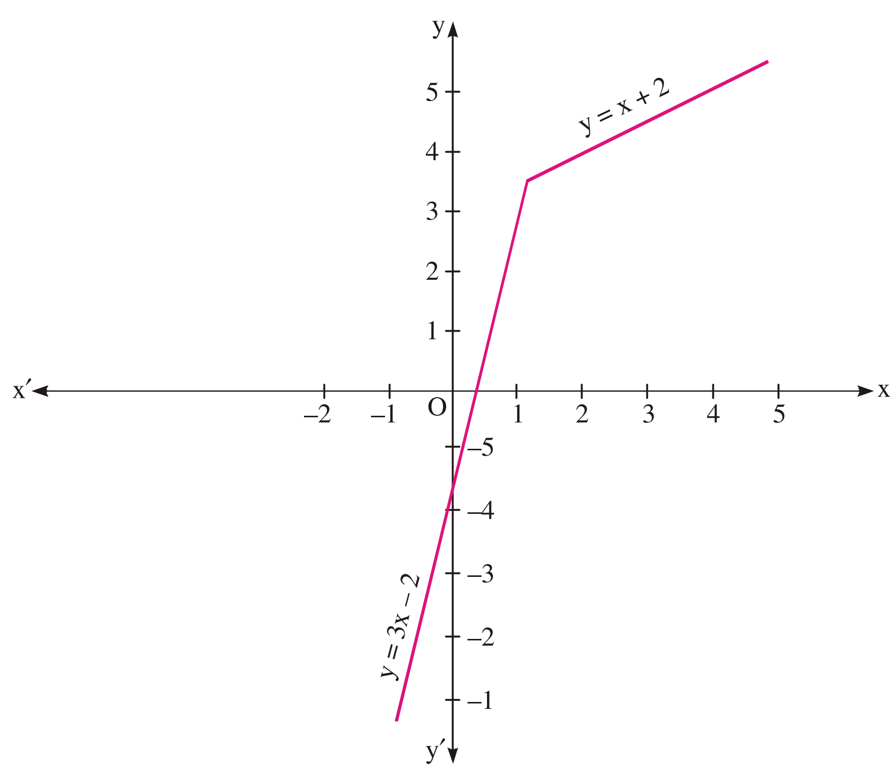
$\therefore$ गुण (iv) का प्रयोग करने पर हम कह सकते हैं कि $x=5$ के अतिरिक्त सभी बिन्दुओं पर फलन $\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-5)}$ सतत है।

व्यापक रूप में, यदि $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ जहां $p(x)$ तथा $q(x)$ बहुपद फलन हैं तथा $q(x)\neq 0$ तो $f(x)$ सतत है क्योंकि $p(x)$ तथा $q(x)$ सतत हैं।

उदाहरण 25.22. यदि $f(x)=\begin{cases}3x-2, x<2 \text{ के लिए} \\ x+2, x\geq 2 \text{ के लिए}\end{cases}$ हो, तो $x = 2$ पर $f(x)$ के सांतत्य की जांच कीजिए।

हल : क्योंकि $f(x)$, बिन्दु $x=2$ के बाईं ओर बहुपद फलन $3x-2$ के रूप में परिभाषित है तथा $x=2$ के दाईं ओर दूसरे बहुपद फलन $x+2$ के रूप में। इसलिए $x=2$ पर हम फलन की बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा अलग-अलग ज्ञात करेंगे।

$$\text{बाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(3x-2) = 3\times 2-2=4$$



चित्र 25.8

दाईं पक्ष सीमा $= \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

चूंकि $x = 2$ पर बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा बराबर है, इसलिए $x = 2$ पर फलन $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व है और वह 4 के बराबर है अर्थात $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

तथा $x = 2$ पर $f(x)$, $x + 2$ के रूप में परिभाषित है।

$\therefore$ $$f(2) = 2 + 2 = 4.$$

अत: $$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

इसलिए $x = 2$ पर $f(x)$ सतत है।

उदाहरण 25.23.

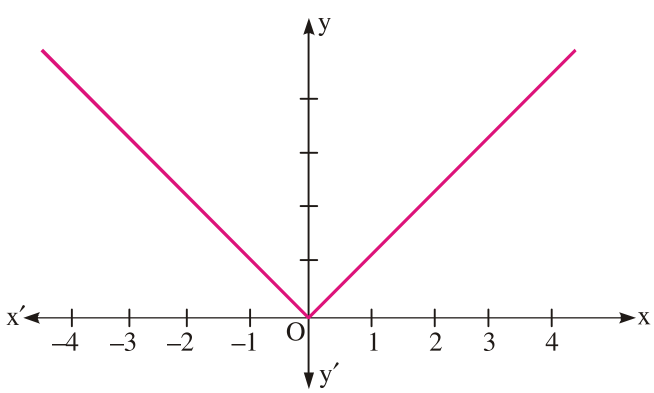
(i) $f(x) = |x|$ का आलेख खींचिए।

(ii) $x = 0$ पर $f(x)$ के सांतत्य की चर्चा कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $x \geq 0$ के लिए $|x| = x$ और $|x| = -x$ होता है। अत: $f(x)$ को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

(i) फलन का आलेख चित्र 25.9 में दिया गया है।



चित्र 25.9

(ii) बाईं पक्ष सीमा $= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

दाईं पक्ष सीमा $= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$

अत: $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

तथा $$f(0) = 0$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

अतः $x = 0$ पर फलन $f(x)$ सतत है।

उदाहरण 25.24. फलन $f(x) = |x-b|$ के $x = b$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हल : हमें दिया है $f(x) = |x-b|$

इस फलन को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$f(x) = \begin{cases} -(x-b), x < b \\ (x-b), x \ge b \end{cases}$$

$$\text{बाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(b-h) = \lim_{h\to 0}[-(b-h-b)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h = 0 \qquad .....(i)$$

$$\text{दाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to b^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(b+h) = \lim_{h\to 0}[(b+h)-b]$$

$$= \lim_{h\to 0} h = 0 \qquad .....(ii)$$

साथ ही, $\qquad f(b) = b - b = 0 \qquad .....(iii)$

(i), (ii) तथा (iii) से, $\qquad \lim_{x\to b} f(x) = f(b)$

अतः $f(x), x = b$ पर सतत है।

उदाहरण 25.25. यदि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x \ne 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

तो ज्ञात कीजिए कि $f(x), x = 0$ पर सतत है या नहीं।

हल : यहां $\qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x \ne 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

$$\text{बाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2(0-h)}{0-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin 2h}{-h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin 2h}{2h} \times \frac{2}{1}\right)$$

$$= 1 \times 2 = 2 \qquad .....(i)$$

$$\text{दाईं पक्ष सीमा} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin 2(0+h)}{0+h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{2h} \times \frac{2}{1}$$

$$= 1 \times 2 = 2 \qquad .....(ii)$$

साथ ही, $f(0) = 2$ (दिया है) .....(iii)

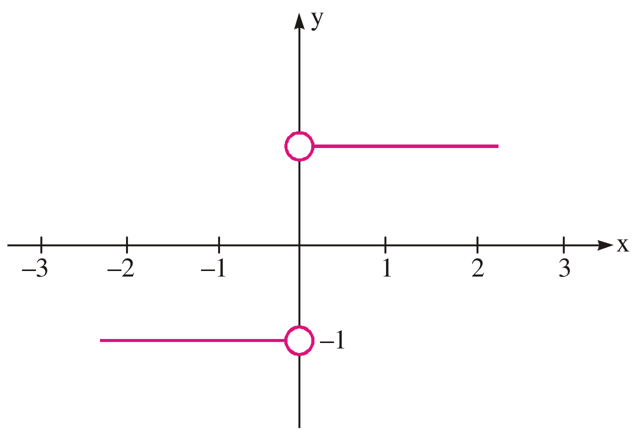
(i), (ii) तथा (iii) से $\lim_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$

अत: $x = 0$ पर $f(x)$ सतत है।

चिन्ह फलन : फलन $f(x) = \text{sgn}(x)$ [जिसे सिगनम (x) पढ़ा जाता है] को निम्न से परिभाषित किया जाता है

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

फलन के नीचे दिये गये आलेख से इसकी बाईं पक्ष सीमा तथा दाईं पक्ष सीमा ज्ञात कीजिए।



चित्र 25.10

आलेख से, हम देखते हैं कि जब $x \to 0^+$, $f(x) \to 1$ तथा जब $(x) \to 0^-$, $f(x) \to -1$

अत: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

क्योंकि यह सीमाएँ समान नहीं है, इसलिए फलन $f(x), x = 0$ पर असतत है।

सबसे बड़ा पूर्णांक फलन: आइए फलन $\lim_{x \to 0} f(x) = [x]$, जहाँ $[x], x$ से बराबर या छोटा बड़े से बड़ा पूर्णांक दर्शाता है। ज्ञात कीजिए कि क्या $f(x)$ सतत है ?

(i) $x = \frac{1}{2}$ पर (ii) $x = 1$ पर

इसे हल करने के लिए, आइए हम x के कुछ स्वेच्छ मान लें जैसे 1, 3, 0, 2, –0, –0.2, 2,-- सबसे बड़े पूर्णांक फलन की परिभाषा से

$$[1.3] = 1, [1.99] = 1, [2] = 2, [0.2] = 0, [-0.2] = -1, [-3.1] = -4, \text{ इत्यादि}$$

साधारणतया $-3 \le x < -2$ के लिए $[x] = -3$

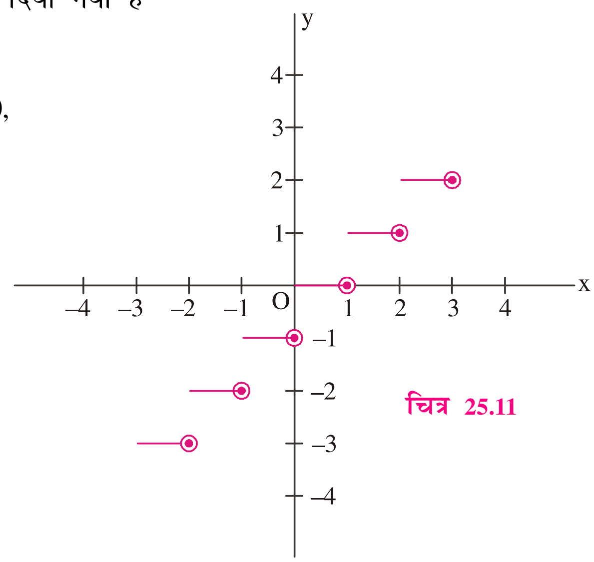
$-2 \le x < -1$ के लिए $\qquad [x] = -2$

$-1 \le x < 0$ के लिए $\qquad [x] = -1$

$0 \le x < 1$ के लिए $\qquad [x] = 0$

$1 \le x < 2$ के लिए $\qquad [x]=1$ इसी प्रकार आगे

फलन $f(x) = [x]$ का आलेख चित्र 25.11 में दिया गया है



चित्र 25.11

(i) आलेख से

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 0,$$

$$\therefore \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 0$$

तथा $$f\left(\frac{1}{2}\right) = [0.5] = 0$$

इसलिए $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

अत: $f(x)$, $x = \frac{1}{2}$ पर सतत है

(ii) $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

अत: $x = 1$ पर $f(x)$ का अस्तित्व नहीं है

टिप्पणी: फलन $f(x) = [x]$ को पग फलन भी कहते हैं।

उदाहरण 25.26. फलन $\dfrac{x-1}{(x+4)(x-5)}$ किन बिन्दुओं पर सतत है?

हल : $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+4)(x-5)}$ दिया है

अंश में दिया फलन $(x-1)$ सतत है। हर में दिया फलन $(x+4)(x-5)$ भी सतत है।

लेकिन $f(x)$, $x = -4, 5$ पर परिभाषित नहीं है

फलन $f(x)$, बिन्दुओं $-4, 5$ को छोड़कर, जहाँ पर यह परिभाषित नहीं है, प्रांत के शेष सब बिन्दुओं पर सतत है।

देखें आपने कितना सीखा 25.5

1. (a) यदि $f(x) = 2x + 1$ जब $x \ne 1$ तथा $f(x) = 3$ जब $x = 1$ दर्शाइए कि $x = 1$ पर $f(x)$ सतत है।

(b) यदि $f(x)=\begin{cases}4x+3, & x\neq 2\\ 3x+5, & x=2\end{cases}$, तो

ज्ञात कीजिए कि $x=2$ पर फलन f सतत है अथवा नहीं।

(c) ज्ञात कीजिए कि $x=2$ पर फलन $f(x)$ सतत है अथवा नहीं जहाँ,

$$f(x)=\begin{cases}4x+3, & x\leq 2\\ 8-x, & x>2\end{cases}$$

(d) $x=1$ पर फलन $f(x)$ के सांतत्य की जांच कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 1\\ x+5, & x>1\end{cases}$$

(e) k का मान ज्ञात कीजिए जबकि फलन

$$f(x)=\begin{cases}kx^2, & x\leq 2\\ 3, & x>2\end{cases}$$ $x=2$ पर सतत है।

2. निम्न फलन के सांतत्य की जांच कीजिए :

(a) $x=2$ पर $f(x)=|x-2|$ (b) $x=-5$ पर $f(x)=|x+5|$

(c) $x=a$ पर $f(x)=|a-x|$

(d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2}, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$, $x=2$ पर सतत है या नहीं जाँच कीजिए।

(e) दर्शाइए कि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-a|}{x-a}, & x\neq a\\ 1, & x=a\end{cases}$, $x=a$ पर असतत है।

3. (a) यदि $f(x)=\begin{cases}\sin 4x, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$, $x=0$ पर, तो जाँच कीजिए कि $f(x)$ एक सतत फलन है या असतत।

(b) यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 7x}{x}, & x\neq 0\\ 7, & x=0\end{cases}$, $x=0$ पर, तो जाँच कीजिए कि $f(x)$ एक सतत फलन है या असतत।

(c) a के किस मान के लिए फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x}{3x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$, $x=0$ पर सतत है?

4. (a) दर्शाइए कि फलन $f(x)$, $x=2$ पर सतत है, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2 \text{ के लिए}\\ 3, & x=2 \text{ के लिए}\end{cases}$$

(b) $x = 1$ पर फलन $f(x)$ के सांतत्य की जांच कीजिए, जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, & x\neq 1 \text{ के लिए}\\ -2, & x=1 \text{ के लिए}\end{cases}$$

(c) k के किस मान के लिए निम्न फलन $x=1$ पर सतत है जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{जब } x\neq 1\\ k & \text{जब } x=1\end{cases}$$

(d) $x=2$ के लिए फलन $f(x)$ के सांतत्य की चर्चा कीजिए, जब

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2 \text{ के लिए}\\ 7, & x=2 \text{ के लिए}\end{cases}$$

5. (a) यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ज्ञात कीजिए कि $x=0$ पर, फलन f सतत है अथवा नहीं

(b) मूल बिन्दु पर फलन $f(x)$ के सांतत्य की जांच कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

6. ज्ञात कीजिए कि $f(x)=[x]$ निम्न बिन्दु पर सतत है अथवा नहीं :

(a) $x=\dfrac{4}{3}$, (b) $x=3$ (c) $x=-1$ (d) $x=\dfrac{2}{3}$

7. किन बिन्दुओं पर निम्न स्थितियों में प्रत्येक फलन $f(x)$ सतत है?

(a) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)(x-4)}$ (b) $f(x)=\dfrac{x-5}{(x+2)(x-3)}$ (c) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+5x-6}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x^2-8x+16}$

आइये दोहराएँ

- यदि एक फलन $f(x), \ell$ की ओर अग्रसर होता है जब x, a की ओर अग्रसर होता है, तो हम कहते हैं कि $f(x)$ की सीमा ℓ है

  संकेत में हम लिखते हैं कि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

- यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ तथा $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ हो, तो

  (i) $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x) = k\ell$

  (ii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \pm m$

  (iii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell m$

  (iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$, जबकि $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

- कुछ प्रसिद्ध फलनों की सीमाएँ

  (i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

  (iii) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ (iv) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

  (v) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (vi) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$

  (vii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.youtube.com/watch?v=HB8CzZEd4xw*
- *http://www.zweigmedia.com/RealWorld/Calcsumm3a.html*
- *http://www.intuitive-calculus.com/limits-and-continuity.html*

आइए अभ्यास करें

निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\lim\limits_{x \to 1} 5$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{2}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^5 + 9x + 7}{3x^6 + x^3 + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - 2x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+k)^4 - x^4}{k(k+2x)}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

7. $\lim\limits_{x \to -1} \left[\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^2 - 1}\right]$

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x-3)\sqrt{x} - 1}{(2x+3)(x-1)}$

9. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}$

10. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}\right]$

11. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$

12. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - (a+1)x + a^2}{x^2 - a^2}$

निम्नलिखित फलनों की बायीं तथा दायीं सीमा ज्ञात कीजिए:

13. $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{if } x \le 1 \\ 3x - 5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ as $x \to 1$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x+1|}$ as $x \to 1$

निम्नलिखित सीमाओं का मान ज्ञात कीजिए:

15. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x+1|}{x+1}$

16. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

17. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-2}{|x-2|}$

18. यदि $f(x) = \dfrac{(x+2)^2 - 4}{x}$, सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$ यद्यपि $f(0)$ परिभाषित नहीं है।

19. k का मान ज्ञात कीजिए यदि $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ परिभाषित है जहां $f(x) = \begin{cases} 5x + 2, & x \le 2 \\ 2x + k, & x > 2 \end{cases}$

20. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{2x}$

21. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}\right]$

22. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x^2}$

23. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + 3x}{2x + \sin 3x}$

24. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \tan \dfrac{\pi x}{2}$

25. मान ज्ञात कीजिए $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin 5\theta}{\tan 8\theta}$

निम्नलिखित सांत्यता का परीक्षण कीजिए:

26. $f(x)\begin{cases}1+3x \text{ if } x>-1 \\ 2 \text{ if } x\le -1\end{cases}$ $x=-1$ पर

27. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-x, 0<x<\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}, x=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2}-x, \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$ $x=\dfrac{1}{2}$ पर

28. k के किस मान के लिए फलन

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{यदि } x\ne 4 \\ k & \text{यदि } x=4\end{cases}$$ $x=4$ पर सतत है ?

29. निम्न फलनों के लिए असतत होने के बिन्दु ज्ञात कीजिए :

(a) $\dfrac{x^2+3}{x^2+x+1}$ (b) $\dfrac{4x^2+3x+5}{x^2-2x+1}$

(b) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+1}$ (d) $f(x)=\begin{cases}x^4-16, & x\ne 2 \\ 16, & x=2\end{cases}$

30. दर्शाइए कि फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+\cos, & x\ne 0 \\ 2, & x=0\end{cases}$ $x=0$ पर सतत है

31. 'a' का मान ज्ञात कीजिए कि फलन $f(x)$ जो निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cos x}{\pi-2x}, & x\ne\dfrac{\pi}{2} \\ 5, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$ सतत है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 25.1

1. (a) 17 (b) 7 (c) 0 (d) 2
(e)- 4 (f) 8

2. (a) 0 (b) $\dfrac{3}{2}$ (c) $-\dfrac{2}{11}$ (d) $\dfrac{q}{b}$ (e) 6
(f) -10 (g) 3 (h) 2

3. (a) 3 (b) $\dfrac{7}{2}$ (c) 4 (d) $\dfrac{1}{2}$

4. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ (d) 2 (e) -1

5. (a) अस्तित्व नहीं है (b) अस्तित्व नहीं है

6. (a) 0 (b) $\frac{1}{4}$ (c) अस्तित्व नहीं है

7. (a) $1, -2$ (b) 1 (c) 19

8. $a = -2$

10. अस्तित्व नहीं है

देखें आपने कितना सीखा 25.2

1. (a) 2 (b) $\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$

2. (a) $-\frac{1}{e}$ (b) $-e$

3. (a) 2 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{a}{b}$

4. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 4 (d) $\frac{2}{3}$

5. (a) $\frac{a^2}{b^2}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$

6. (a) 1 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 0

7. (a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{7}{4}$ (c) -5

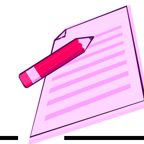
देखें आपने कितना सीखा 25.3

1. (a) सतत (b) सतत
   (c) सतत (d) सतत

5. (a) $p = 3$ (b) $a = 4$ (c) $b = \frac{14}{9}$

देखें आपने कितना सीखा 25.4

2. (a) सतत
   (b) $x = 2$ पर असतत
   (c) $x = -3$ पर असतत
   (d) $x = 4$ पर असतत



देखें आपने कितना सीखा 25.5

1. (b) सतत (c) असतत

   (d) असतत (e) $k = \frac{3}{4}$

2 (a) सतत (b) सतत (c) सतत

   (d) असतत (e) असतत

3 (a) असतत (b) सतत (c) $\frac{5}{3}$

4 (b) सतत (c) $k = 2$

   (d) असतत

5. (a) असतत (b) असतत

6 (a) सतत (b) असतत

   (c) असतत (d) सतत

7. (a) 1 तथा 4 को छोडकर सभी वास्तविक संख्याएँ

   (b) -2 तथा 3 को छोडकर सभी वास्तविक संख्याएँ

   (c) -6 तथा 1 को छोडकर सभी वास्तविक संख्याएँ

   (d) 4 को छोडकर सभी वास्तविक संख्याएँ

आइये अभ्यास करें

1. 5 2. $\sqrt{2}$ 3. 4 4. $-\frac{1}{3}$

5. $2x^2$ 6. 1 7. $-\frac{1}{2}$ 8. $-\frac{1}{10}$

9. -8 10. $\frac{1}{2}$

11. 1 12. $\frac{a-1}{2a}$

13. $1, -2$ 14. $-2, 2$

15. -1 16. 1

17. -1 19. $k = 8$

20. $\frac{7}{2}$ 21. 1

22. $\frac{9}{2}$ 23. 1

24. $\frac{2}{\pi}$ 25. $\frac{5}{8}$

26. असतत

27. असतत

28. $k = 8$

29. (a) नहीं (b) $x = 1$

(c) $x = 1, x = 2$ (d) $x = 2$

31. 10

26

अवकलन

अवकल गणित (Differential Calculus) का उदगम संभवत: 1665 अथवा 1666 ई. में हुआ था जब आइसाक न्यूटन (Issac Newton) ने सबसे पहले उस प्रक्रिया की विचारोत्पत्ति (Conceived) की जिसे हम आजकल अवकलन (एक गणितीय प्रक्रिया के द्वारा मिलने वाला परिणाम) कहते हैं। न्यूटन तथा लेबनिज़ के आविष्कारों में, दूसरे अनेक परिणामों के साथ-साथ, संयुक्त फलनों के योग, गुणन तथा विभाजन के अवकलन करने के नियम हैं।

इस पाठ में हम एक फलन के अवकलज को परिभाषित करेंगे, उसकी ज्यामितीय तथा भौतिक व्याख्या करेंगें, अवकलजों के विभिन्न नियमों की चर्चा करेगें तथा फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलजों की अवधारणा को भी आरम्भ करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- किसी फलन $f(x)$ के अवकलज को $x = a$ पर परिभाषित करना तथा उसकी ज्यामितीय व्याख्या भी करना।
- सिद्ध करना कि किसी स्थिर फलन का अवकलन शून्य होता है।
- $f(x) = x^n$ का अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करना, जबकि $n \in Q$ तथा उसका प्रयोग अन्य फलनों के अवकलज ज्ञात करने में करना।
- दो फलनों के गुणन तथा भाग द्वारा प्राप्त फलन के अवकलज ज्ञात करने के नियमों को बता कर उनका प्रयोग करना।
- श्रृंखला नियम को बताकर उसका अवकलज ज्ञात करने में प्रयोग करना।
- बीजीय फलनों (परिमेय फलनों सहित) का अवकलज ज्ञात करना, तथा
- एक फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज (second order derivative) ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- बहुपद प्रमेय
- फलन तथा उनके आलेख
- एक फलन की सीमा की परिकल्पना

26.1 किसी फलन का अवकलज

फलन $y = x^2$ पर विचार कीजिए तथा मान लीजिए कि इस के आलेख पर एक बिन्दु (5,25) है। यदि x का मान 5 से 5.1, 5.01, 5.001..आदि बदलता है तो y, 25 से 26.01,25.1001, 25.010001... हो जाता है। x में होने वाला एक छोटा सा परिवर्तन y के मान में भी थोड़ा सा परिवर्तन कर देता है। हम x में परिवर्तन को δx से तथा उसके संगत y के परिवर्तन को δy द्वारा व्यक्त करते हैं। यह मानकर कि यह वृद्धि धनात्मक अथवा ऋणात्मक है इन परिवर्तनों का अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ को वृद्धि अनुपात कहते हैं। यहाँ $y = x^2$ के (5,25) पर, तथा वृद्धि $\delta x = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ...$ तथा $\delta y = 1.01, .1001$, .010001, .00100001 आदि लेने पर हमें नीचे दी गई तालिका प्राप्त होती है :

x	5.1	5.01	5.001	5.0001
δx	.1	.01	.001	.0001
y	26.01	25.1001	25.010001	25.00100001
δy	1.01	.1001	.010001	.00100001
$\frac{\delta y}{\delta x}$	10.1	10.01	10.001	10.0001

उपरोक्त तालिका से हम निम्नलिखित निरीक्षण करते हैं :

(i) जब δx बदलता है, तो δy बदलता है

(ii) जब $\delta y \to 0$ तो, $\delta x \to 0$.

(iii) अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ संख्या 10 की ओर अग्रसर होता है।

इस प्रकार इस उदाहरण से पता चलता है कि $\delta y \to 0$ जब $\delta x \to 0$ लेकिन $\frac{\delta y}{\delta x}$ एक सीमित संख्या बन जाता है यह आवश्यक नहीं कि वह शून्य हो। सीमा $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ को संगतता में $\frac{dy}{dx}$ द्वारा निरुपित करते हैं। $\frac{dy}{dx}$ को y का x के सापेक्ष अवकलज (derivative) कहते हैं तथा उसे x के सापेक्ष y का **अवकल गुणांक** (differential co-efficient) पढ़ा जाता है।

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = 10$ (उपरोक्त उदाहरण में) है। याद रखिए कि जबकि δx तथा δy बहुत छोटी–छोटी संख्याएँ (वृद्धि) हैं, तो भी अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ एक निश्चित संख्या 10 है।

व्यापक रूप से मान लीजिए कि

$$y = f(x) \qquad .....(i)$$

एक फलन है। इसका अवकलज ज्ञात करने के लिए मान लीजिए कि x के मान में δx एक छोटा सा परिवर्तन है, तब x का मान $x + \delta x$ हो जायेगा, जहाँ $f(x)$ परिभाषित है। इसी प्रकार y के मान में भी संगत परिवर्तन δy है और तब y का मान $y + \delta y$ हो जायेगा।

इस प्रकार $$y + \delta y = f(x + \delta x) \qquad ...(ii)$$

$$\therefore \qquad (y+\delta y)-y=f(x+\delta x)-f(x)$$

$$\delta y=f(x+\delta x)-f(x) \qquad \ldots(iii)$$

परिवर्तन की दर ज्ञात करने के लिए हम (iii) को δx से भाग करते हैं।

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \qquad \ldots(iv)$$

अन्त में हम अनुपात $\frac{\delta y}{\delta x}$ का सीमांत मान लेते हैं जब $\delta x \to 0$.

यदि
$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \qquad \ldots(v)$$

एक सीमित संख्या है तो $f(x)$ एक अवकलनीय फलन कहलाता है तथा सीमांत मान को $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज कहा जाता है तथा इसे संकेत $f'(x)$ द्वारा लिखा जाता है।

दूसरे शब्दों में $\frac{d}{dx}f(x)$ अथवा $\frac{dy}{dx}$ (जिसे y का $\frac{d}{dx}$) पढ़ा जाता है।

अतः
$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}=f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$$

टिप्पणी

(1) समीकरण (v) द्वारा निरुपित सीमांत प्रक्रिया एक गणितीय संक्रिया है। इस प्रक्रिया को अवकलन कहा जाता है तथा इसके परिणाम को अवकलज कहते हैं।

(2) एक फलन, जिसका किसी बिन्दु पर अवकलज का अस्तित्व है, उसे अवकलनीय फलन कहते हैं।

(3) इस बात को सत्यापित किया जा सकता है कि यदि $f(x)$ किसी बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीय है, तो वह उस बिन्दु पर सतत भी है यद्यपि यह आवश्यक नहीं कि इसका विलोम सत्य हो।

(4) संकेत δx के स्थान पर Δx अथवा h का भी उपयोग किया जाता है।

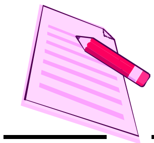
अर्थात, $\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ अथवा $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ है।

(5) यदि $y=f(x)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ को y_1 अथवा y' द्वारा भी निरुपित किया जाता है।

26.2 वेग एक सीमान्त

मान लीजिए कि कि एक कण, जो आरम्भ में O पर स्थिर है, एक सरल रेखा OP पर गतिमान है। इस कण द्वारा P बिन्दु तक पहुँचने में तय की गई दूरी समय t का फलन है।

चित्र 21.1



हम दूरी OP को लिख सकते हैं, $OP = s = f(t)$

इसी प्रकार यदि P के समीप एक बिन्दु Q तक पहुँचने की दूरी δs तथा समय δt हो तो

$$OQ = OP + PQ$$
$$= s + \delta s$$
$$= f(t + \delta t) \quad \text{...(ii)}$$

कण का समय अन्तराल δt में औसत वेग

$$= \frac{\text{दूरी में परिवर्तन}}{\text{समय में परिवर्तन}}$$

$$= \frac{(s+\delta s) - s}{(t+\delta t) - t} \qquad \text{(i) और (ii) द्वारा}$$

$$= \frac{f(t + \delta t) - f(t)}{\delta t}$$

अब हम P के समीप छोटे अन्तराल में औसत वेग ज्ञात करने के लिए δt को और छोटा बना लेते हैं। औसत वेग का सीमांत मान जबकि $\delta t \to 0$ (P बिन्दु पर) किसी समय t पर कण का तात्क्षणिक वेग कहलाता है।

$$\therefore \qquad \text{समय } t \text{ पर वेग} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(t + \delta t) - f(t)}{\delta t}$$

इसे $\frac{ds}{dt}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

अत: यदि किसी गतिमान कण द्वारा समय t पर तय की गई दूरी f(t) है तो $t = t_0$ पर f_1 का अवकलज बिन्दु P पर तात्क्षणिक अर्थात् समय $t = t_0$ पर वेग निरूपित करता है।

इसको **किसी फलन का एक बिन्दु पर अवकलज का भौतिक प्रदर्शन भी कहा जाता है।**

टिप्पणी : अवकलज $\frac{dy}{dx}$, y की x के सापेक्ष तात्क्षणिक परिवर्तन दर को व्यक्त करता है।

उदाहरण 26.1. एक कार द्वारा समय t सेकंड में तय की गयी 's' मी दूरी निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा परिभाषित है :

$$s = 3t^2$$

समय t = 4 सेकण्ड पर कार का वेग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $\quad f(t) = s = 3t^2$

$$\therefore \qquad f(t + \delta t) = s + \delta s = 3(t + \delta t)^2$$

$$\text{किसी समय } t \text{ पर कार का वेग} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(t + \delta t) - f(t)}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{3(t + \delta t)^2 - 3t^2}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{3(t^2 + 2t.\delta t + \delta t^2) - 3t^2}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} (6t + 3\delta t) = 6t$$

$\therefore t = 4$ सेकण्ड पर कार का वेग $= (6 \times 4)$ मी/सेकण्ड

$= 6 \times 4 = 24$ मी/सेकण्ड

देखें आपने कितना सीखा 26.1

1. किसी सरल रेखा में गतिमान कणों का वेग दिये गए समय–दूरी सम्बन्धों से t के इंगित मानों पर ज्ञात कीजिए :

   (a) $s = 2 + 3t; t = \frac{1}{3}$. (b) $s = 8t - 7; t = 4$.

   (c) $s = t^2 + 3t; t = \frac{3}{2}$. (d) $s = 7t^2 - 4t + 1; t = \frac{5}{2}$.

2. एक सरल रेखा में गतिमान एक कण द्वारा t सेकण्ड में तय की गयी दूरी s मी की दूरी $s = t^4 - 18t^2$ द्वारा प्रदर्शित की गई है। t = 10 सेकण्ड पर गति ज्ञात कीजिए

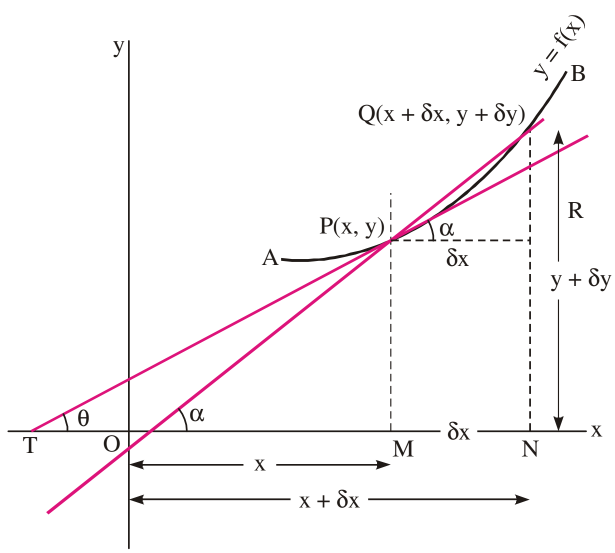
3. एक कण एक क्षैतिज रेखा में गतिमान है। इसकी एक स्थिर बिन्दु 0 से t सेकण्ड में दूरी s नीचे दिए गये संबंध द्वारा परिभाषित है :

$$s = 10 - t^2 + t^3$$

3 सेकण्ड के अन्त में कण की तात्क्षणिक गति ज्ञात कीजिए।

26.3 dy/dx का ज्यामितीय अर्थ

मान लीजिए कि $y = f(x)$ एक x का सतत फलन है। आइये, इस फलन का ग्राफ खींचें। मान लीजिए कि APQB इसका ग्राफीय निरूपण है।



चित्र 21.2

मान लीजिए कि $y = f(x)$ पर एक बिन्दु P (x,y) है। मान लीजिए कि P के समीप ही दूसरा बिन्दु $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ है। PM और QN, x–अक्ष पर लम्ब डालें और PR x–अक्ष के समान्तर खींचे ताकि PR, QN को R पर काटे। QP को मिलायें तथा इसे बिन्दु S तक बढ़ायें । मान लीजिए कि प्रतिछेदी रेखा QPS घनात्मक x–अक्ष के साथ माना कि α कोण बनाती है। बिन्दु P पर वक्र की PT स्पर्श रेखा खीचें जो कि x–अक्ष के साथ θ कोण बनाती है। त्रिभुज QPR में $\angle QPR = \alpha$

$$\tan\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QN-RN}{MN} = \frac{QN-PM}{ON-OM} = \frac{(y+\delta y)-y}{(x+\delta x)-x} = \frac{\delta y}{\delta x} \qquad \text{(i)}$$

अब मान लीजिए कि बिन्दु Q वक्र पर बिन्दु P की ओर P के समीप और समीप जाता है। इस प्रकार जब $Q \to P$ तब $\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$,

$$\alpha \to 0, (\tan\alpha \to \tan\theta)$$

और परिणाम स्वरूप छेदक रेखा QPR स्पर्श रेखा PT के साथ संपाती होने के लिए प्रवृत होती है।

(i) से $\qquad \tan\alpha = \dfrac{\delta y}{\delta x}$

सीमांत स्थिति में, $\qquad \displaystyle\lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0\\ \alpha\to\theta}} \tan\alpha = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$

$$\therefore \qquad \tan\theta = \frac{dy}{dx} \qquad \text{...(ii)}$$

इस प्रकार $\dfrac{dy}{dx}$, जो कि $y = f(x)$ का वक्र के किसी बिन्दु P (x,y) पर अवकलज है, बिन्दु P पर स्पर्श रेखा के ढलान या प्रवणता को निरूपित करता है।

इसे $\dfrac{dy}{dx}$ का ज्यामितीय प्रदर्शन कहा जाता है।

यह बात याद रखें कि वक्र के विभिन्न बिन्दुओं पर $\dfrac{dy}{dx}$ के मान भिन्न भिन्न होते हैं।

इसलिए किसी विशेष बिन्दु पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करने के लिए $y = f(x)$ समीकरण से $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए और $\dfrac{dy}{dx}$ में बिन्दु के निर्देशांक का मान प्रतिस्थापित कीजिए।

उपप्रमेय 1

यदि वक्र के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है। तो $\theta = 0°$ या $180°$, $\dfrac{dy}{dx} = \tan 0°$ या $\tan 180° = 0$ अर्थात $\dfrac{dy}{dx} = 0$

अतः $y = f(x)$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है

उपप्रमेय 2

यदि वक्र के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा, x अक्ष के लम्बवत हो तो $\theta = 90°$, $\frac{dy}{dx} = \tan 90° = \infty$

अत: $y = f(x)$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है।

26.4 अचर फलन का अवकलज

कथन : एक अचर का अवकलज शून्य होता है

उपपत्ति : $y = c$ एक अचर फलन है।

या $\quad y = cx^0 \qquad [\because x^0 = 1] \qquad$ ..(i)

मान लीजिए कि x में एक छोटी सी वृद्धि δx होती है तथा y में उसके संगत वृद्धि δy होती है ताकि

$$y + \delta y = c(x + \delta x)^0 \qquad ..(ii)$$

(ii) में से (i) को घटाने पर

$$(y + \delta y) - y = c(x + \delta x)^0 - cx^0, \qquad (\because x^0 = 1)$$

$$\delta y = c - c$$

$$\delta y = 0$$

δx से भाग करने पर $\quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0}{\delta x}$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 0$$

$\delta x \to 0$ सीमांत लेते हुए $\quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $\quad \frac{dc}{dx} = 0$

यह सिद्ध करता है कि किसी अचर की परिवर्तन दर शून्य है। इसलिए एक अचर का अवकलज शून्य है।

26.5 किसी फलन का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन

किसी फलन के एक बिन्दु पर अवकलज की परिभाषा का स्मरण करने से, हमें किसी फलन का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात करने के लिए निम्न कार्यकारी नियम प्राप्त होता है।

चरण I : दिए गए फलन को $y = f(x)$ के रूप में लिखिए ....(i)

चरण II : मान लीजिए कि x में छोटा परिवर्तन δx है तथा y में संगत परिवर्तन δy है। इस प्रकार

$$y + \delta y = f(x + \delta x) \qquad ....(ii)$$

चरण III : (i) को (ii) में से घटाने पर हमें मिलता है

$$\delta y = f(x+\delta x) - f(x) \qquad ..(iii)$$

चरण IV : (iii) के परिणाम को δx से भाग देने पर, हमें मिलता है

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

चरण V : जब $\delta x \to 0$ तो उपरोक्त की सीमा लेने पर

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

टिप्पणीः

प्रथम सिद्धान्त से फलनों का अवकलज ज्ञात करने को **डेल्टा विधि** अथवा आदितः अवकलन विधि भी कहते हैं।

अब हम कुछ मानक फलनों के अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करेंगे।

कुछ फलनों के प्रथम सिद्धान्त द्वारा अवकलज

मान लीजिए कि $\qquad y = x^n \qquad .....(i)$

x में एक छोटी बढ़ोत्तरी δx के लिए मान लीजिए कि y में संगत बढ़ोत्तरी δy है

तब $\qquad y+\delta y = (x+\delta x)^n . \qquad ...(ii)$

(i) को (ii) में से घटाने पर

$$(y+\delta y) - y = (x+\delta x)^n - x^n$$

$$\therefore \qquad \delta y = x^n\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - x^n$$

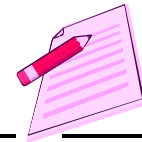
$$= x^n\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - 1\right]$$

क्योंकि δx , x की तुलना में बहुत छोटा है, $\frac{\delta x}{x} < 1$, अतः हम $\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ का किसी घातांक के लिए द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसार लिख सकते हैं।

$\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ को द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसारित करने पर

$$\delta y = x^n\left[1+n\left(\frac{\delta x}{x}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3+\ldots-1\right]$$

$$= x^n(\delta x)\left[\frac{n}{x}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\delta x}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3}+\ldots\right]$$



उपरोक्त को δx से भाग देने पर हमें मिलता है :

$$\frac{\delta y}{\delta x} = x^n \left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3} + \ldots \right]$$

जब $\delta x \to 0$ तथा $(\delta x)^2$ तथा उससे बड़ी घातें भी शून्य की ओर अग्रसर होती हैं, उपरोक्त की सीमा लेने पर

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} x^n \left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3} + \ldots \right]$$

अथवा $\displaystyle \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = x^n \left[\frac{n}{x} + 0 + 0 + \ldots \right]$

अथवा $\displaystyle \frac{dy}{dx} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}$

अतएव $\displaystyle \mathbf{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},} \qquad \left[\because \; y = x^n \right]$

इसको न्यूटन का पावर-फार्मूला **(Power Formula)** अथवा पावर नियम **(Power Rule)** कहते हैं।

टिप्पणी : इस सूत्र का प्रयोग करके हम $x, x^2, x^3, \ldots$ आदि फलनों अर्थात जब $n = 1,2,3,\ldots$ हैं का अवकलन ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए $\displaystyle \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} x^1 = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1.1 = 1$

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x^{2-1} = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

उदाहरण 26.2. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) x^{10} (ii) x^{50} (iii) x^{91}

हल : (i) $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(x^{10}\right) = 10x^{10-1} = 10x^9$

(ii) $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(x^{50}\right) = 50x^{50-1} = 50x^{49}$

(iii) $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(x^{91}\right) = 91x^{91-1} = 91x^{90}$

अत: $\displaystyle \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}$ अथवा $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

अब हम कुछ सरल फलनों का अवकलज परिभाषित अथवा प्रथम सिद्धान्त से करेंगे।

उदाहरण 26.3. x^2 का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $y = x^2$ .....(i)

x में एक छोटी बढ़ोतरी δx से y में संगत बढ़ोतरी δy है

$$y + \delta y = (x + \delta x)^2 \qquad .....(ii)$$

(ii) में से (i) घटाने पर, हमें मिलता है :

$$(y + \delta y) - y = (x + \delta x)^2 - x^2$$

अथवा $$\delta y = x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2 - x^2$$

अथवा $$\delta y = 2x(\delta x) + (\delta x)^2$$

उपरोक्त को δx से भाग देने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$$

सीमा लेने पर हमें मिलता है :

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} (2x + \delta x)$$

अर्थात $$\frac{dy}{dx} = 2x + \lim_{\delta x \to 0} (\delta x)$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

अतएव, $$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{अथवा} \quad \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

उदाहरण 26.4. $\sqrt{x}$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज कीजिए ।

हल : मान लीजिए $y = \sqrt{x}$ ..(i)

x में एक छोटी बढ़ोतरी δx के लिए मान लीजिए कि y में संगत बढ़ोतरी δy है

$$\therefore \quad y + \delta y = \sqrt{x + \delta x} \qquad ...(ii)$$

(ii) में से (i) घटाने पर, हमें मिलता है

$$(y + \delta y) - y = \sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}$$

अथवा $$\delta y = \sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}$$

(iii) के दायें पक्ष के अंश का परिमेयकरण करने पर मिलता है

$$\delta y = \frac{\sqrt{x + \delta x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}} \left(\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{(x + \delta x) - x}{\left(\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}\right)} \quad \text{अथवा} \quad \delta y = \frac{\delta x}{\sqrt{x + \delta x} + \sqrt{x}}$$

δx से भाग देने पर हमें मिलता है

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

सीमा लेने पर हमें मिलता है

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}\right]$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$$ अथवा $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

उदाहरण 26.5. यदि $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है तथा c एक अचर है तो $\phi(x)=cf(x)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : हमें फलन $\phi(x)=cf(x)$ ......(i) का अवकलज ज्ञात करना है

x में एक छोटी बढ़ोतरी δx के लिए, मान लीजिए कि संगत फलन $\phi(x)$ का मान $\phi(x+\delta x)$ तथा $f(x)$ का मान $f(x+\delta x)$ है।

$\therefore$ $$\phi(x+\delta x)=cf(x+\delta x) \qquad ...(ii)$$

(ii) में से (i) घटाने पर हमें मिलता है

$$\phi(x+\delta x)-\phi(x)=c\left[f(x+\delta x)-f(x)\right]$$

उपरोक्त को δx से भाग देने पर हमें मिलता है

$$\frac{\phi(x+\delta x)-\phi(x)}{\delta x}=c\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

सीमा लेने पर हमें मिलता है

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\phi(x+\delta x)-\phi(x)}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}c\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

अथवा $$\phi'(x)=c\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

अथवा $$\phi'(x)=cf'(x)$$

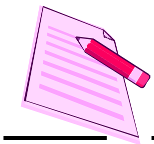
अत: $$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right]=c\cdot\frac{d}{dx}(f(x))$$

देखें आपने कितना सीखा 26.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का डेल्टा विधि से अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $10x$ (b) $2x+3$ (c) $3x^2$

(d) x^2+5x (e) $7x^3$



2. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन को प्रथम सिद्धान्त से अवकलित कीजिए :

(a) $\frac{1}{x}, x \neq 0$ (b) $\frac{1}{ax}, x \neq 0$ (c) $x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

(d) $\frac{1}{ax+b}, x \neq \frac{-b}{a}$ (e) $\frac{ax+b}{cx+d}, x \neq \frac{-d}{c}$ (f) $\frac{x+2}{3x+5}, x \neq \frac{-5}{3}$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $\frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0$ (b) $\frac{1}{\sqrt{ax+b}}, x \neq \frac{-b}{a}$ (c) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0$

(d) $\frac{1+x}{1-x}, x \neq 1$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का डेल्टा विधि से अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = 3\sqrt{x}$ । $f'(2)$ भी ज्ञात कीजिए। (b) $f(r) = \pi r^2$ । $f(2)$ भी ज्ञात कीजिए।

(c) $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ । $f'(3)$ भी ज्ञात कीजिए।

26.6 अवकलजों का बीजगणित

बहुत से फलन दूसरे फलनों के संयोजन से बनते हैं। संयोजन फलनों के योग, अन्तर, गुणन अथवा भाग द्वारा बने हो सकते हैं। हमें कभी-कभी ऐसी परिस्थिति भी मिलती है जहाँ एक फलन का फलन दूसरे फलन के रूप में व्यक्त होता है।

ऐसी परिस्थितयों में अवकलज को एक अच्छा औजार (tool) बनाने के लिए, हमें योग, अन्तर, गुणन, भाग तथा फलनों के फलन के अवकलजों के नियम बनाने आवश्यक हैं। ऐसे नियम हमें बहुपदों, बीजीय (परिमेय सहित) फलनों के अवकलज ज्ञात करने में सहायक होगें।

26.7 फलनों के योग तथा अन्तर का अवकलज

यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ दोनों अवकलनीय फलन हैं तथा $h(x) = f(x) + g(x)$ तो $h'(x)$ क्या होगा?

मान लीजिए कि δx, x में एक छोटी बढ़ोतरी है तथा δy, y में संगत छोटी बढ़ोतरी है।

$\therefore$ $$h(x+\delta x) = f(x+\delta x) + g(x+\delta x)$$

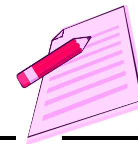
अत: $$h'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{[f(x+\delta x)+g(x+\delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{[f(x+\delta x)-f(x)]+[g(x+\delta x)-g(x)]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} + \frac{g(x+\delta x)-g(x)}{\delta x}\right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x)-g(x)}{\delta x}$$

अथवा $$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$



अतः हम देखते हैं कि दो फलनों के योग का अवकलज उनके अवकलजों के योग के बराबर होता है। इसे योग का नियम कहते हैं।

उदाहरणतया $y = x^2 + x^3$

तो $y' = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x^3\right)$

$= 2x + 3x^2$

इस प्रकार $y' = 2x + 3x^2$

इस योग नियम से हम अन्तर नियम भी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

क्योंकि यदि $h(x) = f(x) - g(x)$ है।

तो $h(x) = f(x) + [-g(x)]$

$\therefore$ $h'(x) = f'(x) + [-g'(x)]$

$= f'(x) - g'(x)$

अर्थात दो फलनों के अन्तर का अवकलज उनके अवकलजों के अन्तर के बराबर होता है। इसे अन्तर नियम कहा जाता है।

इस प्रकार हम प्राप्त करते हैं :

योग नियम : $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$

अन्तर नियम : $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$

उदाहरण 26.6. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y = 10t^2 + 20t^3$

(ii) $y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

हल : (i) हमें दिया है $y = 10t^2 + 20t^3$

$\therefore$ $\frac{dy}{dt} = 10(2t) + 20\left(3t^2\right)$

$= 20t + 60t^2$

(ii) $y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$= x^3 + x^{-2} - x^{-1}$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + (-2)x^{-3} - (-1)x^{-2} = 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$

उदाहरण 26.7. इंगित मानों पर निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन के अवकलज का मान ज्ञात कीजिए:

$y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5, \ x = 1$

हल : हमें दिया है $\quad y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^3 + 3x^2 + 4x + 5\right] = 3x^2 + 6x + 4$$

$$\therefore \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 13$$

देखें आपने कितना सीखा 26.3

1. y' ज्ञात कीजिए :

   (a) $y = 12$ (b) $y = 12x$ (c) $y = 12x + 12$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x) = 20x^9 + 5x$ (b) $f(x) = -50x^4 - 20x^2 + 4$

   (c) $f(x) = 4x^3 - 9 - 6x^2$ (d) $f(x) = \frac{5}{9}x^9 + 3x$

   (e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{2}{5}$ (f) $f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 2$

   (g) $f(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{-4}{5}} + \frac{3}{x^2}$ (h) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. (a) यदि $f(x) = 16x + 2$ तो $f'(0), f'(3), f'(8)$ ज्ञात कीजिए।

   (b) यदि $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 16$ तो $f'(-1), f'(0), f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

   (c) यदि $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{7}x^7 + 2x - 5$, तो $f'(-2)$ ज्ञात कीजिए।

   (d) दिया है कि $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\frac{dV}{dr}$ ज्ञात कीजिए तथा $\left.\frac{dV}{dr}\right]_{r=2}$ ज्ञात कीजिए।

26.8 फलनों के गुणन का अवकलज

आप अंक गणित की चार मूल संक्रियाओं: योग, अन्तर (व्यवकलन) गुणा तथा भाग के विषय में जानते हैं। अभी तक हमने योग तथा अन्तर के नियमों की चर्चा की। आइए अब हम दो फलनों के गुणन से बने फलन का अवकलज ज्ञात करें।

फलन $y = (x^2 + 1)^2$ पर विचार कीजिए।

इसको हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$y=(x^2+1)(x^2+1)$$

ऐसी परिस्थिति में हमें अवकलज ज्ञात करने की विधि ज्ञात करने की आवश्यकता है।

मान लीजिए कि x में बढ़ोतरी δx तथा y में संगत बढ़ोतरी δy है तब

$$y+\delta y=[(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2+1)]$$

$$\Rightarrow \quad \delta y=[(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2+1)]-(x^2+1)(x^2+1)$$

$$=\left[(x+\delta x)^2+1\right]\left[(x+\delta x)^2-x^2+x^2+1\right]-\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)$$

$$=[(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2-x^2)]+(x^2+1)[(x+\delta x)^2+1]-(x^2+1)(x^2+1)$$

$$=[(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2-x^2]+(x^2+1)[x+\delta x)^2+1-(x^2+1)]$$

$$=[(x+\delta x)^2+1][(x+\delta x)^2-x^2]+(x^2+1)[(x+\delta x)^2-x^2]$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x}=\left[(x+\delta x)^2+1\right]\cdot\left[\frac{(x+\delta x)^2-x^2}{\delta x}\right]+\left(x^2+1\right)\left[\frac{(x+\delta x)^2-x^2}{\delta x}\right]$$

$$=\left[(x+\delta x)^2+1\right]\cdot\left[\frac{2x\delta x+(\delta x)^2}{\delta x}\right]+\left(x^2+1\right)\left[\frac{2x\delta x+(\delta x)^2}{\delta x}\right]$$

$$=[(x+\delta x)^2+1](2x+\delta x)+(x^2+1)(2x+\delta x)$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}[(x+\delta x)^2+1]\cdot[2x+\delta x]+\lim_{\delta x\to 0}(x^2+1)(2x+\delta x)$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=\left(x^2+1\right)\left(2x\right)+\left(x^2+1\right)\cdot\left(2x\right)$$

$$=2x\left(2x^2+2\right)$$

$$=4x\left(x^2+1\right)$$

आइए हम विश्लेषण करें : $\frac{dy}{dx}=\left(x^2+1\right)\underset{\substack{x^2+1\\ \text{का अवकलज}}}{\left(2x\right)}+\left(x^2+1\right)\underset{\substack{x^2+1\\ \text{का अवकलज}}}{\left(2x\right)}$

अब $y=x^3\cdot x^2$ पर विचार कीजिए

क्या $\frac{dy}{dx}=x^3\cdot\left(2x\right)+x^2\cdot\left(3x^2\right)$ है?

आइए जाँच करें $x^3\left(2x\right)+x^2\left(3x^2\right)=2x^4+3x^4=5x^4$

हमें मिला है $y=x^3\cdot x^2=x^5$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=5x^4$$

साधारणतया, यदि $f(x)$ तथा $g(x)$, x के दो फलन हैं तो उनके गुणन का अवकलज निम्नलिखित रूप से परिभाषित होता है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$=\left[\text{प्रथम फलन}\right]\left[\frac{d}{dx}(\text{दूसरा फलन})\right]+\left[\text{दूसरा फलन}\right]\left[\frac{d}{dx}(\text{प्रथम फलन})\right]$$

इसको दो फलनों के गुणनफल का अवकलज पढ़ा जाता है। इसे ही गुणन नियम कहते हैं।

उदाहरण 26.8. यदि $y=5x^6\left(7x^2+4x\right)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

I विधि : यहाँ y दो फलनों का गुणनफल है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=(5x^6)\cdot\frac{d}{dx}(7x^2+4x)+(7x^2+4x)\frac{d}{dx}(5x^6)$$

$$=(5x^6)(14x+4)+(7x^2+4x)(30x^5)$$

$$=70x^7+20x^6+210x^7+120x^6$$

$$=280x^7+140x^6$$

II विधि :

$$y=5x^6(7x^2+4x)$$

$$=35x^8+20x^7$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=35\times 8x^7+20\times 7x^6=280x^7+140x^6$$

जो कि वही है जो पहली विधि से प्राप्त हुआ था।

इसी नियम का दो से अधिक फलनों के लिए विस्तार किया जा सकता है।

टिप्पणी : यदि $f(x)$, $g(x)$ तथा $h(x)$ के तीन फलन हैं, तो

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)h(x)\right]=f(x)g(x)\frac{d}{dx}h(x)+g(x)h(x)\frac{d}{dx}f(x)+h(x)f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

उदाहरण 26.9. $\left[f(x)g(x)h(x)\right]$ का अवकलज ज्ञात कीजिए यदि

$$f(x)=x,\ g(x)=(x-3),\ h(x)=x^2+x$$

हल : मान लीजिए कि $y=x(x-3)\left(x^2+x\right)$

y का अवकलज ज्ञात करने के लिये हम पहले किन्ही दो फलनों का गुणनफल ज्ञात करते हैं, फिर गुणन नियम का उपयोग करते हैं, या फिर उपरोक्त टिप्पणी में दिए गए नियम का उपयोग करते हैं।

दूसरे शब्दों में, हम लिख सकते हैं

$$y=\left[x(x-3)\right]\left(x^2+x\right)$$

मान लीजिए कि $\quad u(x) = f(x)g(x) = x(x-3) = x^2 - 3x$

तथा $\quad h(x) = x^2 + x$

$\therefore \quad y = u(x) \times h(x)$

अतः $$\frac{dy}{dx} = x(x-3)\frac{d}{dx}\left(x^2+x\right) + \left(x^2+x\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-3x\right)$$

$$= x(x-3)(2x+1) + \left(x^2+x\right)(2x-3)$$

$$= x(x-3)(2x+1) + \left(x^2+x\right)(x-3) + x\left(x^2+x\right)$$

$$= [f(x)g(x)]\cdot h'(x) + [g(x)h(x)]f'(x) + [h(x)f(x)].g'(x)$$

अतः $$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = [f(x)g(x)]\cdot\frac{d}{dx}[h(x)] + [g(x)h(x)]\frac{d}{dx}[f(x)] + h(x)f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]$$

विकल्पतः हम सीधे तीन फलनों के गुणनफल को लेकर गुणन नियम लगा सकते हैं।

$$\frac{dy}{dx} = [x(x-3)]\frac{d}{dx}(x^2+x) + [(x-3)(x^2+x)]\frac{d}{dx}(x) + [(x^2+x)\cdot x]\frac{d}{dx}(x-3)$$

$$= x(x-3)(2x+1) + (x-3)(x^2+x)\cdot 1 + (x^2+x)\cdot x\cdot 1$$

$$= 4x^3 - 6x^2 - 6x$$

देखें आपने कितना सीखा 26.4

1. गुणन नियम के उपयोग से निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए:

   (a) $f(x) = (3x+1)(2x-7)$ (b) $f(x) = (x+1)(-3x-2)$

   (c) $f(x) = (x+1)(-2x-9)$ (d) $y = (x-1)(x-2)$

   (e) $y = x^2(2x^2+3x+8)$ (f) $y = (2x+3)(5x^2-7x+1)$

   (g) $u(x) = (x^2-4x+5)(x^3-2)$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(r) = r(1-r)(\pi r^2 + r)$ (b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

   (c) $f(x) = (x^2+2)(x^3-3x^2+4)(x^4-1)$

   (d) $f(x) = (3x^2+7)(5x-1)\left(3x^2+9x+8\right)$

26.9 भाग नियम

आपने उन फलनों, जो दो फलनों के योग, अन्तर एवम् गुणन के रूप में है, के अवकलज ज्ञात करने के लिए क्रमशः योग, अन्तर तथा गुणन नियम सीखे हैं। आइए अब हम एक कदम और आगे बढ़ाकर उन फलनों का अवकलज ज्ञात करने के लिए 'भाग नियम' सीखें जो दो फलनों के भाग के रूप में व्यक्त हैं।

मान लीजिए कि $g(x)=\dfrac{1}{r(x)}$, $\qquad [r(x)\neq 0]$

आइए, हम g (x) का अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करें।

$$g(x)=\frac{1}{r(x)}$$

$$\therefore \qquad g'(x)=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{r(x+\delta x)}-\dfrac{1}{r(x)}}{\delta x}\right]$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{r(x)-r(x+\delta x)}{\delta(x)r(x)r(x+\delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{r(x)-r(x+\delta x)}{\delta x}\right]\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{r(x).r(x+\delta x)}$$

$$=-r'(x)\cdot\frac{1}{[r(x)]^2}=-\frac{r'(x)}{[r(x)]^2}$$

आइए, अब ऐसे दो फलन f (x) तथा g (x) लें ताकि $\phi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$ हो।

हम लिख सकते हैं $\qquad \phi(x)=f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$

$$\therefore \qquad \phi(x)=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\left[\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}\right]=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

अतएव $\qquad \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

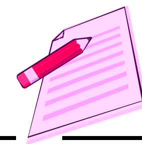
$$=\frac{\text{हर (अंश का अवकलज) – अंश (हर का अवकलज)}}{(\text{हर})^2}$$

इसे भाग नियम (अथवा भागफल नियम) कहते हैं

उदाहरण 26.10. यदि $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x-1}$, $\quad x\neq\dfrac{1}{2}$, है तो $f'(x)$ ज्ञात कीजिए ।

हलः $\qquad f'(x)=\dfrac{(2x-1)\dfrac{d}{dx}(4x+3)-(4x+3)\dfrac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$

$$=\frac{(2x-1).4-(4x+3).2}{(2x-1)^2}=\frac{-10}{(2x-1)^2}$$



टिप्पणी

आइए हम निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करे :

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}, \qquad x \neq \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x-1}\right] = \frac{(2x-1)\frac{d}{dx}(1) - 1\frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)\times 0 - 2}{(2x-1)^2} \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(1) = 0\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x-1}\right] = -\frac{2}{(2x-1)^2}$$

देखें आपने कितना सीखा 26.5

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y = \frac{2}{5x-7},\ x \neq \frac{7}{5}$ (b) $y = \frac{3x-2}{x^2+x-1}$ (c) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \frac{x^4}{x^2-3}$ (e) $f(x) = \frac{x^5-2x}{x^7}$ (f) $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3+4}$

2. $f'(x)$ ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = \frac{x(x^2+3)}{x-2}$, $[x \neq 2]$

(b) $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$, $[x \neq 3, \quad x \neq 4]$

26.10 श्रंखला नियम

इससे पहले हमें $\sqrt{x^4+8x^2+1}$ के रूप वाले फलन नहीं मिले हैं। इस फलन को दो फलनों के योग अन्तर, गुणन अथवा भागफल के रूप में नहीं व्यक्त कर सकते, इसलिए अब तक की सीखी हुई विधियां हमें ऐसे फलनों के अवकलज ज्ञात करने में सहायक नहीं हो सकती। अत:, इस प्रकार के फलन का अवकलज ज्ञात करने के लिए हमें एक नया नियम विकसित करना होगा।

आइए लिखें : $y = \sqrt{x^4+8x^2+1}$ अथवा $y = \sqrt{t}$ जहाँ $t = x^4+8x^2+1$ अर्थात y, t का फलन है तथा t, x का फलन है। अत: y एक फलन का फलन है। हम एक फलन के फलन का अवकलज ज्ञात करने का प्रयास करने के लिए आगे बढते हैं।

मान लीजिए कि δt , t में वृद्धि है तथा y में सगत वृद्धि δy है

तब, $\delta y \to 0$ जब $\delta t \to 0$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\delta t} \qquad \text{(i)}$$

इसी प्रकार t, x का फलन है

$\therefore \qquad \delta t \to 0 \qquad$ जब $\qquad \delta x \to 0$

$$\therefore \qquad \frac{dt}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta t}{\delta x} \qquad \text{(ii)}$$

क्योंकि y, t का फलन है तथा t, x का फलन है। इसलिए $\delta y \to 0$ जब $\delta x \to 0$

(i) तथा (ii) से, हमें मिलता है।

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \left[\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\delta t}\right]\left[\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta t}{\delta x}\right]$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

अत: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

इसे **श्रंखला नियम** कहा जाता है।

उदाहरण 26.11. यदि $y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया है : $y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$

जिसे हम लिख सकते हैं :

$$y = \sqrt{t}, \qquad \text{जहाँ} \qquad t = x^4 + 8x^2 + 1 \qquad \text{(i)}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \text{तथा} \qquad \frac{dt}{dx} = 4x^3 + 16x$$

यहाँ $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (4x^3 + 16x)$$

$$= \frac{4x^3 + 16x}{2\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}} = \frac{2x^3 + 8x}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}}$$

उदाहरण 26.12. फलन $y = \frac{5}{(x^2 - 3)^7}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{5(x^2 - 3)^{-7}\right\}$$

$$= 5[(-7)(x^2 - 3)^{-8}] \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 3) \qquad \text{(श्रंखला नियम द्वारा)}$$

$$= -35(x^2 - 3)^{-8} \cdot (2x) = \frac{-70x}{(x^2 - 3)^8}$$

उदाहरण 26.13. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि $y = \frac{1}{4}v^4$ तथा $v = \frac{2}{3}x^3 + 5$ हो।

हल : हमें दिया है : $y = \frac{1}{4}v^4$ तथा $v = \frac{2}{3}x^3 + 5$

(i) $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{4}(4v^3) = v^3 = \left(\frac{2}{3}x^3 + 5\right)^3 \quad ...(i)$$

तथा $$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{3}(3x^2) = 2x^2 \quad ..(ii)$$

अत: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 + 5\right)^3 (2x^2)$$ [(i) तथा (ii) का उपयोग करने पर]

टिप्पणी

हमने पहले वाले उदाहरणों में देखा है कि अवकलजों के विभिन्न नियमों के उपयोग से हम सभी बीजीय फलनों का अवकलज ज्ञात कर सकते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 26.6

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = (5x-3)^7$ (b) $f(x) = (3x^2 - 15)^{35}$

(c) $f(x) = (1-x^2)^{17}$ (d) $f(x) = \frac{(3-x)^5}{7}$

(e) $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 1}$ (f) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^5}$

(g) $y = \frac{1}{\sqrt{7-3x^2}}$ (h) $y = \left[\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{16}\right]^5$

(i) $y = (2x^2 + 5x - 3)^{-4}$ (j) $y = x + \sqrt{x^2 + 8}$

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए :

(a) $y = \frac{3-v}{2+v}, v = \frac{4x}{1-x^2}$ (b) $y = at^2, t = \frac{x}{2a}$

26.12 एक फलन के द्वितीय कोटि के अवकलज

द्वितीय कोटि का अवकलज: दिया है कि y, x का फलन, मान लीजिए $f(x)$ है। यदि इसका अवकलज $\frac{dy}{dx}$ भी अवकलनीय फलन है, तो $\frac{dy}{dx}$ का अवकलज $y = f(x)$ का x के सापेक्ष द्वितीय कोटि का

अवकलज कहलाता है तथा उसे $\frac{d^2y}{dx^2}$ द्वारा निरुपित करते हैं। अन्य प्रतीक (symbols) जो द्वितीय कोटि अवकलज के लिए प्रयुक्त होते हैं D^2, f'', y'', y_2 आदि हैं।

टिप्पणी

इस प्रकार x पर f'' का मान होगा :

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(h)}{h}$$

तीसरी, चौथी, ... कोटि के अवकलज भी इसी प्रकार से परिभाषित किये जा सकते हैं। अतः x के सापेक्ष y का दूसरा अवकलज या दूसरी कोटि का अवकलज है।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

उदाहरण 26.14. दूसरी कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) x^2 (ii) x^3+1 (iii) $(x^2+1)(x-1)$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

हल : (i) मान लीजिए $y = x^2$, तब $\frac{dy}{dx} = 2x$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x) = 2 \cdot \frac{d(x)}{dx}$$
$$= 2.1 = 2$$

$\therefore$ $$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

(ii) मान लीजिए $y = x^3 + 1$

तब, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ (योग नियम द्वारा तथा अचर का अवकलज शून्य है।)

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2) = 3.2x = 6x$$

अर्थात् $$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

(iii) मान लीजिए $y = (x^2+1)(x-1)$,

तब, $$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)\frac{d}{dx}(x-1) + (x-1), \frac{d}{dx}(x^2+1)$$
$$= (x^2+1)\cdot 1 + (x-1)\cdot 2x = x^2+1+2x^2-2x = 3x^2-2x+1$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 2x + 1\right) = 6x - 2$$

$\therefore$ $$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2$$

(iv) मान लीजिए कि $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)\cdot 1 - (x+1).1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right] = -2.-2.\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$\therefore$ $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

देखें आपने कितना सीखा 26.7

निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का दूसरी कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

1. (a) x^3 (b) $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 10x + 1$

   (c) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ (d) $\sqrt{x^2+1}$

आइये दोहराएँ

- किसी फलन f (x) का x के सापेक्ष अवकलज

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

- एक अचर का अवकलज शून्य द्वारा परिभाषित होता है अर्थात $\dfrac{dc}{dx} = 0$ जहाँ c एक अचर है
- ज्यामितीय रूप में फलन $y = f(x)$ का बिन्दु $P(x, y)$ पर अवकलज $\dfrac{dy}{dx}$, वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा की प्रवणता होती है।
- y का x के सापेक्ष अवकलज y का x के सापेक्ष तात्क्षणिक परिवर्तन दर का द्योतक है।
- यदि f (x) एक अवकलनीय फलन है तथा c एक अचर है, तो $\dfrac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = cf'(x)$ अवकलज दर्शाता है जहाँ $f'(x), f(x)$ का अवकलज निरुपित करता है।

- फलनों का योग अथवा अन्तर नियम :

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\pm\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$$

फलनों के योग अथवा अन्तर का अवकलज उनके अवकलजों के क्रमशः योग अथवा अन्तर के बराबर होता है।

- **गुणन नियम :**

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

(पहला फलन) (दूसरे फलन का अवकलज)+ (दूसरा फलन) (पहले फलन का अवकलज)

- **भागफल नियम :**

$$\text{यदि } \phi(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0,\ \text{ तो}$$

$$\phi'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}=\frac{\text{हर}\left(\frac{d}{dx}(\text{अंश})\right)-\text{अंश}\left(\frac{d}{dx}(\text{हर})\right)}{(\text{हर})^2}$$

- श्रंखला नियम : $\frac{d}{dx}\left[f\{g(x)\}\right]=f'[g(x)]\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]$

$f(x)$ का $g(x)$ के सापेक्ष अवकलज $\times$ $g(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज

- y का x के सापेक्ष, द्वितीय कोटि का अवकलज, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$ है।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/12methods/03differentiation/index.shtml*
- *https://www.youtube.com/watch?v=MGOFPFLTHLg*
- *https://www.youtube.com/watch?v=IrBWXoJ9NMQ*
- *https://www.youtube.com/watch?v=rsrMQ5osWfc*
- *https://www.youtube.com/watch?v=CzGGtJnbd1A*
- *https://www.youtube.com/watch?v=Dx4GuHH4lTI*
- *https://www.youtube.com/watch?v=nVfWs10A_b8*
- *https://www.youtube.com/watch?v=j5pVhP8GmP4*

आइए अभ्यास करें

1. एक कार द्वारा t सेकेण्ड में तय की गई दूरी s मी $s=t^2$ द्वारा दी गयी है, ज्ञात कीजिए :
   (a) दूरी का समय के सापेक्ष परिवर्तन दर (b) कार की गति जब $t = 3$ सेकेण्ड

2. दिया है : $f(t) = 3 - 4t^2$। डेल्टा विधि के प्रयोग से $f'(t)$ तथा $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ज्ञात कीजिए।

3. $f(x) = x^4$ का प्रथम सिद्धान्त द्वारा अवकलन कीजिए। अतएव $f'(0), f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ज्ञात कीजिए।

4. फलन $\sqrt{2x+1}$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $ax + b$, (b) $2x^2 + 5$

(c) $x^3 + 3x^2 + 5$ (d) $(x-1)^2$)

6. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = px^4 + qx^2 + 7x - 11$ (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

(c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (d) $f(x) = \frac{x^2 - a}{a - 2}, a \neq 2$

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का दो विधियों से अवकलज ज्ञात कीजिए- पहले गुणन नियम द्वारा तथा फिर गुणन को खोलकर। सत्यापित कीजिए कि दोनों उत्तर एक ही हैं :

(a) $y = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (b) $y = x^{\frac{3}{2}}\left(2 + 5x + \frac{1}{x}\right)$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ (b) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{10}{x^3}$

(c) $f(x) = \frac{1}{(1+x^4)}$ (d) $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}$

(e) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 5}{x}$ (f) $f(x) = \frac{x-4}{2\sqrt{x}}$

(g) $f(x) = \frac{(x^3+1)(x-2)}{x^2}$

9. श्रखंला नियम के उपयोग से, निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ (b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (c) $\sqrt[3]{x^2(x^2+3)}$

10. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $\sqrt{x+1}$ (b) $x \cdot \sqrt{x-1}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 26.1

1. (a) 3 (b) 8 (c) 6 (d) 31

2. 3640 मी/सेकेण्ड 3. 21 मी/सेकेण्ड

देखें आपने कितना सीखा 26.2

1. (a) 10 (b) 2 (c) 6x (d) 2x+5 (e) $21x^2$

2. (a) $-\frac{1}{x^2}$ (b) $-\frac{1}{ax^2}$ (c) $1-\frac{1}{x^2}$ (d) $\frac{-a}{(ax+b)^2}$ (e) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

(f) $-\frac{1}{(3x+5)^2}$

3. (a) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (b) $\frac{-a}{2(ax+b)(\sqrt{ax+b})}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

(d) $\frac{2}{(1-x)^2}$

4. (a) $\frac{3}{2\sqrt{x}};\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (b) $2\pi r$; 4π (c) $2\pi r^2$; 36π

देखें आपने कितना सीखा 26.3

1. (a) 0 (b) 12 (c) 12

2. (a) $180x^8+5$ (b) $-200x^3-40x$ (c) $12x^2-12x$

(d) $5x^8+3$ (e) $3x^2-6x+3$ (f) $x^7-x^5+x^3$

(g) $\frac{4}{15}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{4}{5}x^{\frac{-9}{5}}-6x^{-3}$ (h) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

3. (a) 16, 16, 16 (b) 3,1 ,1 (c) 186

(d) $4\pi r^2, 16\pi$

देखें आपने कितना सीखा 26.4

1. (a) $12x-19$ (b) $-6x-5$ (c) $4x-11$

(d) $2x-3$ (e) $8x^3+9x^2+16x$ (f) $30x^2+2x-19$

(g) $5x^4-16x^3+15x^2-4x+8$

2. (a) $-4\pi r^3+3(\pi-1)r^2+2r$ (b) $3x^2-12x+11$

(c) $9x^8-28x^7+14x^6-12x^5-5x^4+44x^3-6x^2+4x$

(d) $(5x-1)(3x^2+9x+8).6x+5(3x^2+7)(3x^2+9x+8)+(3x^2+7)(5x-1)(6x+9)$

देखें आपने कितना सीखा 26.5

1. (a) $\dfrac{-10}{(5x-7)^2}$ (b) $\dfrac{-3x^2+4x-1}{(x^2+x+1)^2}$ (c) $\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

(d) $\dfrac{2x^5-12x^3}{(x^2-3)^2}$ (e) $\dfrac{-2x^4+12}{x^7}$ (f) $\dfrac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$ (g) $\dfrac{4-5x^3}{2\sqrt{x}(x^3+4)^2}$

2. (a) $\dfrac{2x^3-6x^2-6}{(x-2)^2}$ (b) $\dfrac{-4x^2+20x-22}{(x-3)^2(x-4)^2}$

देखें आपने कितना सीखा 26.6

1. (a) $35(5x-6)^6$ (b) $210x(3x^2-15)^{34}$

(c) $-34x(1-x^2)^{16}$ (d) $\dfrac{-5}{7}(3-x)^4$

(e) $-(2x+3)(x^2+3x+1)^{-2}$ (f) $\dfrac{10x}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}$

(g) $3x(7-3x^2)^{-3/2}$ (h) $5(x^5+2x^3)\left(\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{1}{16}\right)^4$

(i) $-4(4x+5)(2x^2+5x-3)^{-5}$ (j) $1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

2. (a) $\dfrac{-5(1+x^2)}{(1+2x-x^2)^2}$ (b) $\dfrac{x}{2a}$

देखें आपने कितना सीखा 26.7

1. (a) $6x$ (b) $12x^2+18x+18$ (c) $\dfrac{4}{(x+1)^3}$ (d) $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$

आइए अभ्यास करें

1. (a) 2 t (b) 6 सेकेण्ड

2 $-8t, -\dfrac{8}{3}$ 3. $0, \dfrac{-1}{2}$ 4. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

5. (a) a (b) 4x (c) $3x^2+6x$ (d) $2(x-1)$

6. (a) $4px^3+2qx+7$ (b) $3x^2-6x+5$

(c) $1-\dfrac{1}{x^2}$ (d) $\dfrac{2x}{a-2}$

7. (a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $3\sqrt{x}+\dfrac{25}{2}x\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

8. (a) $\dfrac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ (b) $\dfrac{-6}{(x-1)^3}-\dfrac{30}{x^4}$

(c) $\dfrac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$ (d) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^{3/2}}$

(e) $3+\dfrac{5}{x^2}$ (f) $\dfrac{1}{4\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

(g) $3x^2-2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$

9. (a) $1-\dfrac{1}{x^2}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}\cdot(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ (c) $\dfrac{4x^3+6x}{3(x^4+3x^2)^{\frac{2}{3}}}$

10. (a) $-\dfrac{1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ (b) $\dfrac{2+x-x^2}{4(x-1)^{\frac{1}{2}}}$

27

त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलज

त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है, जो उच्चत्तर गणित की अन्य शाखाओं जैसे कैलकुलस (कलन) सदिश, त्रिविम ज्यामिति, फलन- प्रसंवादी (Harmonic) अथवा सरल फलनों के अध्ययन के लिए अनिवार्य है। त्रिकोणमितीय फलन के उपयोग के बिना उन पर क्रियाएँ करना असंभव प्रतीत होता है। कुछ विशेष सीमाओं तक त्रिकोणमितीय फलन हमें प्रतिलोम भी देते हैं।

अब प्रश्न यह है कि क्या अवकलज ज्ञात करने के वे सभी नियम जो हमने अभी तक पढ़े हैं त्रिकोणमितीय फलनों के लिए भी लागू हैं?

इस पाठ में हम इसी प्रश्न का हल ढूढ़ेंगे तथा इस क्रिया में हम त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनके प्रतिलोमों के अवकलजों को ज्ञात करने के सूत्र या परिणाम ज्ञात करेंगे। जब तक अन्यथा न कहा जाए, हम त्रिकोणमितिय फलनों और उनके प्रतिलोमों की सम्पूर्ण चर्चा में, रेडियन माप का प्रयोग करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करना।
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात करना।
- त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज गुणन नियम (Product rule), भाग नियम (quotient rule) तथा श्रृंखला नियम (chain rule) का प्रयोग करके ज्ञात करना।
- एक फलन के द्वितीय कोटि (second order) का अवकलज ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- कोणों के फलनों के रूप में त्रिकोणमितीय अनुपातों का ज्ञान।
- त्रिकोणमितीय फलनों की कुछ मानक सीमाओं का ज्ञान,
- अवकलज की परिभाषा तथा फलनों के अवकलज ज्ञात करने के विभिन्न नियमों का ज्ञान।

27.1 प्रथम सिद्धान्त द्वारा कुछ त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलज

(i) माना $y = \sin x$ है।

माना कि x के मान में नगण्य (सूक्ष्म) वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore \qquad y + \delta y = \sin(x + \delta x)$

तथा $\qquad \delta y = \sin(x + \delta x) - \sin x$

$$= 2\cos\left[x + \frac{\delta x}{2}\right]\sin\frac{\delta x}{2} \qquad \left[\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = \cos x.1 \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0}\frac{\frac{\sin \delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = 1\right]$$

अत:, $$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

अर्थात्, $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(ii) माना $y = \cos x$ है।

माना कि x के मान में नगण्य वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore \qquad y + \delta y = \cos(x + \delta x)$

तथा $\qquad \delta y = \cos(x + \delta x) - \cos x$

$$= -2\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-2\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\therefore \qquad \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= -\sin x \cdot 1 \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0}\sin\frac{\delta x/2}{\delta x/2} = 1\right]$$

अत:, $$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

अर्थात्, $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(iii) माना $y = \tan x$ है।

माना कि x के मान में नगण्य वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore \quad y + \delta y = \tan(x + \delta x)$

तथा

$$\delta y = \tan(x + \delta x) - \tan x$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x)\cdot\cos x - \sin x.\cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{\sin[(x+\delta x) - x]}{\cos(x+\delta x)\cos x} = \frac{\sin\delta x}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin\delta x}{\delta x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad \left[\because \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x} = 1\right]$$

अत:, $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$

अर्थात्, $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(iv) माना $y = \sec x$ है।

माना कि x के मान में नगण्य वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore \quad y + \delta y = \sec(x + \delta x)$

तथा

$$\delta y = \sec(x+\delta x) - \sec x = \frac{1}{\cos(x+\delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x} = \frac{2\sin\left[x + \frac{\delta x}{2}\right]\sin\frac{\delta x}{2}}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos(x+\delta x)\cos x}\cdot\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos(x+\delta x)\cos x}\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot 1 = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \tan x.\sec x$$

अत:, $\dfrac{dy}{dx} = \sec x.\tan x$

अर्थात्, $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

उदाहरण 27.1. प्रथम सिद्धान्त द्वारा $\cot x^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \cot x^2$

माना x के मान में नगण्य वृद्धि δx के लिए, y के मान में संगत वृद्धि δy है।

$\therefore$ $$y + \delta y = \cot(x + \delta x)^2$$

तथा $$\delta y = \cot(x+\delta x)^2 - \cot x^2 = \frac{\cos(x+\delta x)^2}{\sin(x+\delta x)^2} - \frac{\cos x^2}{\sin x^2}$$

$$= \frac{\cos(x+\delta x)^2 \sin x^2 - \cos x^2 \sin(x+\delta x)^2}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$$= \frac{\sin[x^2 - (x+\delta x)^2]}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2} = \frac{\sin[-2x\delta x - (\delta x)^2]}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$$= \frac{-\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$\therefore$ $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x \sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$\therefore$ $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x(2x+\delta x)} \lim_{\delta x \to 0} \frac{2x+\delta x}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

अर्थात्, $$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot \frac{2x}{\sin x^2 . \sin x^2} \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x(2x+\delta x)} = 1\right]$$

$$= \frac{-2x}{(\sin x^2)^2} = \frac{-2x}{\sin^2 x^2} = -2x.\operatorname{cosec}^2 x^2$$

अतः, $$\frac{d}{dx}(\cot x^2) = -2x \cdot \operatorname{cosec}^2 x^2$$

उदाहरण 27.2. प्रथम सिद्धान्त द्वारा $\sqrt{\operatorname{cosec} x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = \sqrt{\operatorname{cosec} x}$ है।

तब, $$y + \delta y = \sqrt{\operatorname{cosec}(x + \delta x)}$$

$\therefore$ $$\delta y = \frac{\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} - \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}(x+\delta x) - \operatorname{cosec} x}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}} = \frac{\dfrac{1}{\sin(x+\delta x)} - \dfrac{1}{\sin x}}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}}$$

$$= \frac{\sin x - \sin(x+\delta x)}{\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right][\sin(x+\delta x)\sin x]}$$

$$= -\frac{2\cos\left(x+\dfrac{\delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\delta x}{2}}{\left(\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right)[\sin(x+\delta x)\sin x]}$$

$\therefore$ $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\dfrac{\delta x}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}]} \times \frac{\dfrac{\sin \delta x/2}{\delta x/2}}{[\sin(x+\delta x).\sin x]}$$

अर्थात्, $$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos x}{(2\sqrt{(\operatorname{cosec} x)}(\sin x)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} x)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{cosec} x \cot x)$$

अत:, $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\operatorname{cosec} x}\right) = -\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} x)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{cosec} x \cot x)$$

उदाहरण 27.3. प्रथम सिद्धान्त द्वारा $\sec^2 x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = \sec^2 x$ है।

तथा $$y + \delta y = \sec^2(x+\delta x) \text{ है।}$$

तब, $$\delta y = \sec^2(x+\delta x) - \sec^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x - \cos^2(x+\delta x)}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin[(x+\delta x+x]\sin[(x+\delta x-x)]}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$\therefore$ $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x.\delta x}$$

अब, $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x.\delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x \cos^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x \cos^2 x} = 2\tan x.\sec^2 x$$

$$= 2\sec x(\sec x.\tan x)$$

$$= 2\sec x \ (\sec x \tan x)$$

देखें आपने कितना सीखा 27.1

1. निम्नलिखित फलनों के प्रथम सिद्धान्त द्वारा x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) cosec x (b) cot x (c) cos 2 x

(d) cot 2 x (e) $\operatorname{cosec} x^2$ (f) $\sqrt{\sin x}$

2. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $2\sin^2 x$ (b) $\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $\tan^2 x$

27.2 त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज

अभी आपने प्रथम सिद्धान्त द्वारा त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करना सीखा है और फलन के फलन का अवकलज ज्ञात करना भी सीखा। अब, हम इन अवकलजों के कुछ और उदाहरणों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 27.4. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin 2x$ (ii) $\tan\sqrt{x}$ (iii) $\operatorname{cosec}(5x^3)$

हल : (i) माना $y = \sin 2x$,

$= \sin t$, जहाँ $t = 2x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \cos t \qquad \text{और} \quad \frac{dt}{dx} = 2$$

श्रृंखला नियम से $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = \cos t\,(2) = 2.\cos t = 2\cos 2x$$

अतः, $$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$$

(ii) माना $y = \tan\sqrt{x}$

$= \tan t$, जहाँ $t = \sqrt{x}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \sec^2 t \quad \text{और} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

श्रंखला नियम से $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ से, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 t\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

अत:, $$\frac{d}{dx}\left(\tan\sqrt{x}\right)=\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

वैकल्पिक विधि : माना $y=\tan\sqrt{x}$ है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\sec^2\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

(iii) माना $y=\operatorname{cosec}(5x^3)$ है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}(5x^3)\cot(5x^3)\cdot\frac{d}{dx}[5x^3]$$

$$=-15x^2\operatorname{cosec}(5x^3)\cot(5x^3)$$

अथवा $t=5x^3$ प्रतिस्थापित करके, आप इस प्रश्न को हल कर सकते हैं।

उदाहरण 27.5. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y=x^4\sin 2x$ (ii) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

हल : (i) $y=x^4\sin 2x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=x^4\frac{d}{dx}(\sin 2x)+\sin 2x\frac{d}{dx}(x^4) \qquad \text{(गुणन नियम का प्रयोग करके)}$$

$$=x^4(2\cos 2x)+\sin 2x(4x^3)$$

$$=2x^4\cos 2x+4x^3\sin 2x$$

$$=2x^3[x\cos 2x+2\sin 2x]$$

(ii) माना $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(1+\cos x)(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2}$$

उदाहरण 27.6. निम्न में से प्रत्येक फलन का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\cos^2 x$ (ii) $\sqrt{\sin^3 x}$

हल : (i) माना $y = \cos^2 x$

$= t^2$, जहाँ $t = \cos x$

$\therefore$ $\frac{dy}{dt} = 2t$ और $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

श्रृंखला नियम $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ का प्रयोग करके, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x.(-\sin x)$$

$$= -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$

(ii) माना $y = \sqrt{\sin^3 x}$ है।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\sin^3 x)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(\sin^3 x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3 x}} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\sin x}\ \cos x$$

अतः, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin^3 x}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\sin x}\ \cos x$

उदाहरण 27.7. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि :

(i) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

हल : (i) $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\frac{(-\cos x)(1+\sin x)-(1-\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\left(\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)=-\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{1+\sin x}\sqrt{1+\sin x}}{(1+\sin x)^2}=\frac{-1}{1+\sin x}$$

अतः, $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{1+\sin x}$

उदाहरण 27.8. निम्नलिखित फलनों के अंकित बिन्दुओं पर अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\quad y=\sin 2x+(2x-5)^2,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ पर

(ii) $\quad y=\cot x+\sec^2 x+5,\ x=\pi/6$ पर

हल : (i) $\quad y=\sin 2x+(2x-5)^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\cos 2x\frac{d}{dx}(2x)+2(2x-5)\frac{d}{dx}(2x-5)$$

$$=2\cos 2x+4(2x-5)$$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ पर $\quad \dfrac{dy}{dx}=2\cos\pi+4(\pi-5)$

$$=-2+4\pi-20$$

$$=4\pi-22$$

(ii) $\quad y=\cot x+\sec^2 x+5$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x+2\sec x(\sec x\tan x)$$

$$=-\operatorname{cosec}^2 x+2\sec^2 x\tan x$$

$x=\dfrac{\pi}{6}$ पर $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi}{6}+2\sec^2\dfrac{\pi}{6}\tan\dfrac{\pi}{6}$

$$=-4+2\cdot\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}=-4+\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

उदाहरण 27.9. यदि $\sin y = x \sin(a+y)$ है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

हल : यह दिया है कि $\sin y = x \sin(a+y)$

अर्थात्, $$x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)} \qquad .....(1)$$

(1) के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$1 = \left[\frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y \cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}\right]\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$1 = \left[\frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}\right]\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

उदाहरण 27.10 यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \text{....अनंत तक}}}$ है,

तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{2y-1}$ होगा।

हल : हमें दिया है $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \text{...अनंत तक}}}$

अथवा $y = \sqrt{\sin x + y}$ अथवा $y^2 = \sin x + y$

x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx} \qquad \text{अथवा} \qquad (2y-1)\frac{dy}{dx} = \cos x$$

अतः, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$$

देखें आपने कितना सीखा 27.2

1. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y = 3\sin 4x$ (b) $y = \cos 5x$ (c) $y = \tan\sqrt{x}$

(d) $y = \sin\sqrt{x}$ (e) $y = \sin x^2$ (f) $y = \sqrt{2}\tan 2x$

(g) $y = \pi\cot 3x$ (h) $y = \sec 10x$ (i) $y = \operatorname{cosec} 2x$

2. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $f(x) = \dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$ (b) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (c) $f(x) = x \sin x$

(d) $f(x)=(1+x^2)\cos x$ (e) $f(x)=x \operatorname{cosec} x$ (f) $f(x)=\sin 2x \cos 3x$

(g) $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$

3. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y=\sin^3 x$ (b) $y=\cos^2 x$ (c) $y=\tan^4 x$

(d) $y=\cot^4 x$ (e) $y=\sec^5 x$ (f) $y=\operatorname{cosec}^3 x$

(g) $y=\sec\sqrt{x}$ (h) $y=\sqrt{\dfrac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}}$

4. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अंकित बिन्दु पर अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y=\cos(2x+\pi/2), x=\dfrac{\pi}{3}$ (b) $y=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}, x=\dfrac{\pi}{4}$

5. यदि $y=\sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x+\ldots}}}$ अनंत तक हो, तो

दर्शाइये कि $(2y-1)\dfrac{dy}{dx}=\sec^2 x$ है।

6. यदि $\cos y = x\cos(a+y)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$ है।

27.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन

अब हम मानक प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ के प्रथम सिद्धान्त द्वारा अवकलज ज्ञात करेंगे।

(i) प्रथम सिद्धान्त द्वारा, हम $\sin^{-1}x$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करेंगे, जो निम्न द्वारा प्रदर्शित किया जाता है :

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}}$$

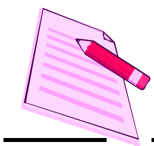
माना $y=\sin^{-1}x$ है, तो $x=\sin y$ होगा। इसलिए $x+\delta x=\sin(y+\delta y)$

जब $\delta x \to 0$, तो $\delta y \to 0$

अब, $\delta x=\sin(y+\delta y)-\sin y$

$\therefore$ $$1=\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta x}$$ (दोनों पक्षों को δx से भाग देने पर)

अथवा $$1=\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}$$



$\therefore \qquad 1 = \lim\limits_{\delta y \to 0} \dfrac{\sin(y+\delta y) - \sin y}{\delta y} \cdot \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} \qquad [\because \delta y \to 0$ जब $\delta x \to 0]$

$$= \left[\lim_{\delta y \to 0} \frac{2\cos\left(y + \frac{1}{2}\delta y\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta y\right)}{\delta y} \right] \cdot \frac{dy}{dx} = (\cos y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

या $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos\ y} = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - \sin^2 y)}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

$\therefore \qquad \dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

(ii) $\qquad \mathbf{\dfrac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}}.$

इसकी उपपत्ति के लिए, उसी तरह आगे बढ़िए जैसे $\sin^{-1} x$ के लिए किया था।

(iii) अब हम दिखाते हैं कि

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

माना $y = \tan^{-1} x$ है। तब, $x = \tan y$ है। अतः, $x + \delta x = \tan(y + \delta y)$

जब $\qquad \delta x \to 0$, तो $\delta y \to 0$

अब, $\qquad \delta x = \tan(y + \delta y) - \tan y$

$\therefore \qquad 1 = \dfrac{\tan(y + \delta y) - \tan y}{\delta y} \cdot \dfrac{\delta y}{\delta x}.$

$\therefore \qquad 1 = \lim\limits_{\delta y \to 0} \dfrac{\tan(y + \delta y) - \tan y}{\delta y} \cdot \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} \qquad [\because \delta y \to 0,$ जब $\delta x \to 0]$

$$= \left[\lim_{\delta y \to 0} \left\{ \frac{\sin(y + \delta y)}{\cos(y + \delta y)} - \frac{\sin y}{\cos y} \right\} \Big/ \delta y \right] \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin(y + \delta y)\cos y - \cos(y + \delta y)\sin y}{\delta y \cdot \cos(y + \delta y)\cos y}$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \left[\frac{\sin(y + \delta y - y)}{\delta y . \cos(y + \delta y) \cdot \cos y} \right]$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \left[\frac{\sin \delta y}{\delta y} \cdot \frac{1}{\cos(y + \delta y)\cos y} \right] = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{dy}{dx} \cdot \sec^2 y$$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1 + \tan^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$\therefore \qquad \dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

(iv) $$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

इसकी उपपत्ति के लिए, उसी प्रकार आगे बढ़िए जैसे $\tan^{-1}x$ के लिए किया था।

(v) अब हम प्रथम सिद्धान्त से सिद्ध करेंगे कि $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$ है।

माना $y = \sec^{-1}x$ है तब, $x = \sec y$ है तथा $x + \delta x = \sec(y+\delta y)$ है।

जब $\delta x \to 0$, तो $\delta y \to 0$

अब, $$\delta x = \sec(y+\delta y) - \sec y$$

$$\therefore \quad 1 = \frac{\sec(y+\delta y)-\sec y}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\therefore \quad 1 = \lim_{\delta y\to 0}\frac{\sec(y+\delta y)-\sec y}{\delta y}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} \qquad [\because \delta y \to 0, \text{ जब } \delta x \to 0]$$

$$= \frac{dy}{dx}\cdot\lim_{\delta y\to 0}\frac{2\sin\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\delta y.\cos y\cos(y+\delta y)}$$

$$= \frac{dy}{dx}\cdot\lim_{\delta y\to 0}\left[\frac{\sin\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)}{\cos y\cos(y+\delta y)}\cdot\frac{\sin\frac{\delta y}{2}}{\frac{\delta y}{2}}\right] = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\sin y}{\cos^2 y} = \frac{dy}{dx}\cdot\sec y\tan y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y\tan y} = \frac{1}{\sec y\sqrt{(\sec^2 y-1)}} = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

अतः, $$\frac{d}{dx} = (\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(vi) $$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

इसकी उपपत्ति के लिए, आप उसी तरह आगे बढ़िए जैसे कि $\sec^{-1}x$ के लिए किया था।

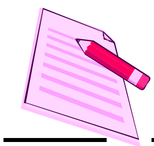
उदाहरण 27.11. $\sin^{-1}(x^2)$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $y = \sin^{-1}x^2$ है।

$$\therefore \quad x^2 = \sin y$$

अब, $$(x+\delta x)^2 = \sin(y+\delta y)$$

$$\therefore \quad \frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x} = \frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta x}$$



जब $\delta x \to 0$, तो $\delta y \to 0$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{(x+\delta x) - x} = \lim_{\delta y \to 0} \frac{2\cos\left(y + \frac{\delta y}{2}\right)}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\delta y}{2}}{\frac{\delta y}{2}} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\therefore \quad 2x = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos y} = \frac{2x}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

उदाहरण 27.12. x के सापेक्ष $\sin^{-1}\sqrt{x}$ का डैल्टा विधि (प्रथम सिद्धान्त) से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\quad y = \sin^{-1}\sqrt{x}$ है।

$$\Rightarrow \quad \sin y = \sqrt{x} \qquad ..(1)$$

साथ ही, $\quad \sin(y+\delta y) = \sqrt{x+\delta x} \qquad ..(2)$

(1) तथा (2) से, हमें मिलता है :

$$\sin(y+\delta y) - \sin y = \sqrt{x+\delta x} - \sqrt{x}$$

अथवा $$2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\delta x}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

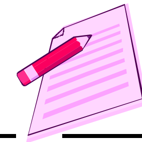
अथवा $$\frac{\delta y}{\delta x} \cdot \cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\frac{\delta y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right) \cdot \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\frac{\delta y}{2}}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}} \qquad (\because \ \delta y \to 0, \text{ जब } \ \delta x \to 0)$$

अथवा $\quad \frac{dy}{dx}\cos y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ या $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos y} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\ \sqrt{1-x}}$$



देखें आपने कितना सीखा 27.3

1. प्रथम सिद्धान्त से निम्न में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\cos^{-1} x^2$ (ii) $\dfrac{\cos^{-1} x}{x}$ (iii) $\cos^{-1}\sqrt{x}$

(iv) $\tan^{-1} x^2$ (v) $\dfrac{\tan^{-1} x}{x}$ (vi) $\tan^{-1}\sqrt{x}$

27.4 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज

पिछले अनुच्छेद में, हमने प्रथम सिद्धान्त द्वारा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज ज्ञात करना सीखा था। अब हम उन्हीं प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज का प्रयोग कर फलनों के अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 27.13. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin^{-1}\sqrt{x}$ (ii) $\cos^{-1} x^2$ (iii) $(\operatorname{cosec}^{-1} x)^2$

हल : (i) माना $y = \sin^{-1}\sqrt{x}$ है।

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) \qquad \text{(श्रंखला नियम द्वारा)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

(ii) माना $y = \cos^{-1} x^2$ है।

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot(2x)$$

अतः $$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x^2\right) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(iii) माना $y = (\operatorname{cosec}^{-1} x)^2$ है।

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx} = 2(\operatorname{cosec}^{-1} x)\cdot\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right)$$

$$= 2(\operatorname{cosec}^{-1} x)\cdot\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \frac{-2\operatorname{cosec}^{-1} x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$\therefore$ $$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right)^2 = \frac{-2\operatorname{cosec}^{-1} x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

उदाहरण 27.14. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\tan^{-1}\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ (ii) $\sin(2\sin^{-1} x)$

हल : (i) $$y=\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\tan^{-1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=-1/2$$

(ii) माना $y=\sin(2\sin^{-1}x)$ है।

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\cos(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{d}{dx}(2\sin^{-1}x)=\cos(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\cos(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\cos(2\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

उदाहरण 27.15. दर्शाइए कि $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ का $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष अवकलज 1 है।

हल : माना $y=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ तथा $z=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ है।

$x=\tan\theta$ लेने पर,

$\therefore$ $y=\tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ तथा $z=\sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\tan^{-1}(\tan 2\theta)$ तथा $z=\sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$=2\theta$ तथा $z=2\theta$

$\therefore$ $\frac{dy}{d\theta}=2$ तथा $\frac{dz}{d\theta}=2$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dz}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$ (श्रृंखला नियम द्वारा)

देखें आपने कितना सीखा 27.4

निम्न में से प्रत्येक फलन का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए तथा परिणाम $(1-3)$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए :

1. (a) $\sin^{-1}x^2$ (b) $\cos^{-1}\frac{x}{2}$ (c) $\cos^{-1}\frac{1}{x}$

2. (a) $\tan^{-1}(\operatorname{cosec}x-\cot x)$ (b) $\cot^{-1}(\sec x+\tan x)$ (c) $\tan^{-1}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

3. (a) $\sin(\cos^{-1} x)$ (b) $\sec(\tan^{-1} x)$ (c) $\sin^{-1}(1-2x^2)$

(d) $\cos^{-1}(4x^3-3x)$ (e) $\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

4. $\dfrac{\tan^{-1} x}{1+\tan^{-1} x}$ का $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

27.5 द्वितीय कोटि (Second order) के अवकलज

हम जानते हैं कि किसी फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज उसके प्रथम अवकलज का अवकलज होता है। इस अनुच्छेद में, हम त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात करेंगे। इसके अन्तर्गत हम गुणन, भाग तथा श्रृंखला नियम का प्रयोग करेंगे।

आइए कुछ उदाहरण लें :

उदाहरण 27.16. निम्न में से प्रत्येक का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin x$ (ii) $x\cos x$ (iii) $\cos^{-1} x$

हल: (i) माना $y=\sin x$ है।

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें मिलता है: $\dfrac{dy}{dx}=\cos x$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष फिर अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$$

(ii) माना $y=x\cos x$ है।

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx}=x(-\sin x)+\cos x.1$$

$$\frac{dy}{dx}=-x\sin x+\cos x$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष फिर अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-x\sin x+\cos x)=-(x.\cos x+\sin x)-\sin x$$

$$=-x.\cos x-2\sin x$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-(x.\cos x+2\sin x)$$

(iii) माना $y=\cos^{-1} x$ है।

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-1}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}=-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष फिर अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-3/2}\cdot(-2x)\right] = -\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

अत:, $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$$

उदाहरण 27.17. यदि $y=\sin^{-1}x$ हो, तो दर्शाइए कि $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 = 0$ है, जहाँ y_2 तथा y_1 क्रमश: x के सापेक्ष द्वितीय कोटि तथा प्रथम कोटि, अवकलज हैं।

हल : हमें दिया है : $y=\sin^{-1}x$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

अथवा $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2}$$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

अथवा $$\left(1-x^2\right)y_1^2 = 1$$

दोनों पक्षों को x के सापेक्ष फिर अवकलित करने पर, हमें मिलता है :

$$\left(1-x^2\right)\cdot 2y_1\frac{d}{dx}(y_1) + (-2x)\cdot y_1^2 = 0$$

अथवा $$\left(1-x^2\right)\cdot 2y_1y_2 - 2x\, y_1^2 = 0$$

अथवा $$\left(1-x^2\right)y_2 - x\, y_1 = 0$$

देखें आपने कितना सीखा 27.5

1. निम्न में से प्रत्येक का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $\sin(\cos x)$ (b) $x^2\tan^{-1}x$

2. यदि $y=\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x\right)^2$ हो, तो दर्शाइए कि $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 = 1$ होगा।

3. यदि $y=\sin(\sin x)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$ होगा।

4. यदि $y = x+\tan x$, हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos^2 x\frac{d^2y}{dx^2} - 2y + 2x = 0$ होगा।

आइये दोहराएँ

- (i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

- यदि u, x का एक अवकलनीय फलन है, तब :

  (i) $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

- (i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

- यदि u, x का एक अवकलनीय फलन है, तब :

  (i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

- एक त्रिकोणमितीय फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज उसके पहली कोटि के अवकलज का अवकलज होता है।

सहायक वेबसाइट

- *http://people.hofstra.edu/stefan_waner/trig/trig3.html*
- *http://www.math.com/tables/derivatives/more/trig.htm*
- *https://www.freemathhelp.com/trig-derivatives.html*

आइए अभ्यास करें

1. यदि $y = x^3 \tan^2 \frac{x}{2}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

2. मान ज्ञात कीजिए : $\frac{d}{dx}\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}$, $x = \frac{\pi}{2}$ तथा 0 पर।

3. यदि $y = \frac{5x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \cos^2(2x+1)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

4. यदि $y = \sec^{-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

5. यदि $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ है, तो $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ...}}}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

7. $\sin^{-1} x$ का $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

8. यदि $y = \cos(\cos x)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x \cdot \frac{dy}{dx} + y.\sin^2 x = 0$ है।

9. यदि $y = \tan^{-1} x$ है, तो दर्शाइए कि $(1+x)^2 y_2 + 2xy_1 = 0$ है।

10. यदि $y = (\cos^{-1} x)^2$ है, तो दर्शाइए कि $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 27.1

1. (a) $-\operatorname{cosec} x \cot x$ (b) $-\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $-2\sin 2x$

   (d) $-2\operatorname{cosec}^2 2x$ (e) $-2x \operatorname{cosec} x^2 \cot x^2$ (f) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

2. (a) $2\sin 2x$ (b) $-2\operatorname{cosec}^2 x \cot x$ (c) $2\tan x \sec^2 x$

देखें आपने कितना सीखा 27.2

1. (a) $12\cos 4x$ (b) $-5\sin 5x$ (c) $\frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (d) $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

   (e) $2x \cos x^2$ (f) $2\sqrt{2}\sec^2 2x$ (g) $-3\pi \operatorname{cosec}^2 3x$

   (h) $10\sec 10x \tan 10x$ (i) $-2\operatorname{cosec} 2x \cot 2x$

2. (a) $\dfrac{2\sec x\tan x}{(\sec x+1)^2}$ (b) $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ (c) $x\cos x+\sin x$

(d) $2x\cos x-(1+x^2)\sin x$

(e) $\operatorname{cosec} x\,(1-x\cot x)$ (f) $2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$ (g) $\dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$

3. (a) $3\sin^2 x\cos x$ (b) $-\sin 2x$ (c) $4\tan^3 x\sec^2 x$ (d) $-4\cot^3 x\operatorname{cosec}^2 x$

(e) $5\sec^5 x\tan x$ (f) $-3\operatorname{cosec}^3 x\cot x$ (g) $\dfrac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(h) $\sec x(\sec x+\tan x)$

4. (a) 1 (b) $\sqrt{2}+2$

देखें आपने कितना सीखा 27.3

1. (i) $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (ii) $\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-\cos^{-1}x}{x^2}$ (iii) $\dfrac{-1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1-x)}}$

(iv) $\dfrac{2x}{1+x^4}$ (v) $\dfrac{1}{x(1+x^2)}-\dfrac{\tan^{-1}x}{x^2}$ (vi) $\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}(1+x)}$

देखें आपने कितना सीखा 27.4

1. (a) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\dfrac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$ (c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2. (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) -1

3. (a) $-\dfrac{\cos\left(\cos^{-1}x\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\sec\left(\tan^{-1}x\right)$

(c) $\dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\dfrac{-1}{2(1+x^2)}$

4. $\dfrac{1}{\left(1+\tan^{-1}x\right)^2}$

देखें आपने कितना सीखा 27.5

1. (a) $-\cos x\cos(\cos x)-\sin^2 x\sin(\cos x)$ (b) $\dfrac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2}+2\tan^{-1}x$

आइए अभ्यास करें

1. $x^3 \tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2} + 3x^2\tan^2\frac{x}{2}$

2. 0, 0

3. $\frac{5(3-x)}{3(1-x)^{\frac{5}{3}}} - 2\sin(4x+2)$

5. $|\sec\theta|$

6. $\frac{1}{2y-1}$

7. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

28

चर घातांकी तथा लघुगणकीय फलनों का अवकलज

हम जानते हैं कि जनसंख्या बराबर बढ़ती जाती है परन्तु कुछ स्थितियों में घटती भी है। प्रकृति में कई और ऐसे क्षेत्र हैं जिनमें वृद्धि तथा ह्रास बराबर होता रहता है। अर्थ शास्त्र, कृषि तथा व्यापार में बहुत से उदाहरण दिये जा सकते हैं जिनमें वृद्धि तथा कमी बराबर होती रहती है। आइए जीवाणुओं की वृद्धि के उदाहरण पर विचार करें। माना जीवाणुओं की वर्तमान सख्ंया 1000000 है तथा 10 घंटे के बाद यह दुगुनी हो जाती है। हम यह जानना चाहते हैं कि कितने समय पश्चात इनकी संख्या 3000000 हो जायेगी।

इस वृद्धि का उत्तर क्रमवार योग से अथवा किसी निश्चित संख्या से गुणा करने पर प्राप्त नहीं हो सकता। वास्तव में गणित में एक और विधि है जिसे चर घातांकी फलन कहते हैं तथा यह हमें ऐसी स्थितियों में वृद्धि अथवा कमी का आकलन करने में सहायता करता है। चर घांताकी फलन, लघुगणकीय फलन का विलोम है। इस पाठ में हम इन्हीं फलनों पर विचार-विमर्श करेंगे तथा उनके अवकलज ज्ञात करने के नियमों का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- चर घातांकी व लघुगणकीय फलनों को परिभाषित करना तथा उनका अवकलज ज्ञात करना।
- बीजीय, त्रिकोणमितीय, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय, चर घांताकी व लघुगणकीय फलनों के संयोजन से बने फलनों के अवकलज ज्ञात करना।
- किन्हीं फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

नीचे दी गयी मानक सीमाओं (limits) के अनुप्रयोग :

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ (iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\log_{e}a$

(v) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(e^{h}-1)}{h}=1$

अवकलन की परिभाषा तथा फलनों के अवकलज निकालने के नियम।

28.1 चर घांताकी फलन का अवकलज

मान लीजिए कि $y = e^x$ एक चर घातांकी फलन है .....(i)

$\therefore \quad y + \delta y = e^{(x+\delta x)}$ (संगत छोटी बढ़त) .....(ii)

(i) तथा (ii) से हमें मिलता है :

$\therefore \quad \delta y = e^{x+\delta x} - e^x$

दोनों पक्षों को δx से भाग देने के साथ सीमांत लेने पर जब $\delta x \to 0$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} e^x \frac{\left[e^{\delta x} - 1\right]}{\delta x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x.1 = e^x$$

अतः हमें मिलता है $\mathbf{\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x}$.

कार्यकारी नियमः $\quad \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \cdot \frac{d}{dx}(x) = e^x$

अब मान लीजिए कि $\quad y = e^{ax+b}$.

$\therefore \quad y + \delta y = e^{a(x+\delta x)+b}$ [δx तथा δy संगत बढ़ते हैं]

$$\therefore \quad \delta y = e^{a(x+\delta x)+b} - e^{ax+b} = e^{ax+b}\left[e^{a\delta x} - 1\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = e^{ax+b}\frac{\left[e^{a\delta x} - 1\right]}{\delta x}$$

$$= a \cdot e^{ax+b}\frac{e^{a\delta x} - 1}{a\delta x}$$ (a से गुणा व भाग देने पर)

सीमा, जब $\delta x \to 0$, लेने पर

$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = a \cdot e^{ax+b} \cdot \lim_{\delta x \to 0}\frac{e^{a\delta x} - 1}{a\ \delta x}$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = a \cdot e^{ax+b} \cdot 1 \ = ae^{ax+b} \qquad \left[\lim_{x \to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1\right]$$

कार्यकारी नियमः $\frac{d}{dx}\left(e^{ax+b}\right) = e^{ax+b} \cdot \frac{d}{dx}(ax+b) = e^{ax+b} \cdot a$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(e^{ax+b}\right) = ae^{ax+b}$$

उदाहरण 28.1. निम्नलिखित में प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) e^{5x} (ii) e^{ax} (iii) $e^{-\frac{3x}{2}}$

हल : (i) मान लीजिए कि $y = e^{5x}$.

तो $y = e^t$ जहाँ $5x = t$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dt} = e^t$ तथा $5 = \dfrac{dt}{dx}$

हम जानते हैं कि $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = e^t \cdot 5 = 5e^{5x}$

अन्य विधि से, $\dfrac{d}{dx}\left(e^{5x}\right) = e^{5x} \cdot \dfrac{d}{dx}(5x) = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$

(ii) मान लीजिए कि $y = e^{ax}$.

तो $y = e^t$ जहाँ $t = ax$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dt} = e^t$ तथा $\dfrac{dt}{dx} = a$

हम जानते हैं कि, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \times \dfrac{dt}{dx} = e^t \cdot a$

अतः $\dfrac{dy}{dx} = a \cdot e^{ax}$

(iii) मान लीजिए कि $y = e^{\frac{-3x}{2}}$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dt} = e^{\frac{-3}{2}x} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-3}{2}x\right)$

अतः $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-3}{2} e^{\frac{-3x}{2}}$

उदाहरण 28.2. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y = e^x + 2\cos x$ (ii) $y = e^{x^2} + 2\sin x - \dfrac{5}{3}e^x + 2e$

हल : (i) $y = e^x + 2\cos x$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(e^x\right) + 2\dfrac{d}{dx}(\cos x) = e^x - 2\sin x$

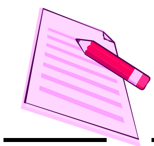
(ii) $y = e^{x^2} + 2\sin x - \dfrac{5}{3}e^x + 2e$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = e^{x^2} \dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) + 2\cos x - \dfrac{5}{3}e^x + 0$ ....($\because$ e अचर है।)

$= 2xe^{x^2} + 2\cos x - \dfrac{5}{3}e^x$

उदाहरण 28.3. $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

(i) $y = e^{x\cos x}$ (ii) $y = \dfrac{1}{x}e^x$ (iii) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$



हल: (i) $y = e^{x\cos x}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\,\frac{d}{dx}(x\cos x)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\left[x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}(x)\right] = e^{x\cos x}[-x\sin x + \cos x]$$

(ii) $y = \frac{1}{x}e^x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$$ (गुणन नियम के उपयोग से)

$$= \frac{-1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x = \frac{e^x}{x^2}[-1+x] = \frac{e^x}{x^2}[x-1]$$

(iii) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= e^{\frac{1-x}{1+x}}\left[\frac{-1.(1+x)-(1-x).1}{(1+x)^2}\right] = e^{\frac{1-x}{1+x}}\left[\frac{-2}{(1+x)^2}\right] = \frac{-2}{(1+x)^2}e^{\frac{1-x}{1+x}}$$

उदाहरण 28.4. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $e^{\sin x}\cdot \sin e^x$ (ii) $e^{ax}\cdot\cos(bx+c)$

हल : $y = e^{\sin x}\cdot\sin e^x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sin e^x\right) + \sin e^x\,\frac{d}{dx}e^{\sin x}$$

$$= e^{\sin x}\cdot\cos e^x\cdot\frac{d}{dx}\left(e^x\right) + \sin e^x\cdot e^{\sin x}\,\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= e^{\sin x}\cdot\cos e^x\cdot e^x + \sin e^x\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x$$

$$= e^{\sin x}[e^x\cdot\cos e^x + \sin e^x\cdot\cos x]$$

(ii) $y = e^{ax}\cos(bx+c)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^{ax}\cdot\frac{d}{dx}\cos(bx+c) + \cos(bx+c)\frac{d}{dx}e^{ax}$$

$$= e^{ax}\cdot[-\sin(bx+c)]\frac{d}{dx}(bx+c) + \cos(bx+c)e^{ax}\,\frac{d}{dx}(ax)$$

$$= -e^{ax}\sin(bx+c)\cdot b + \cos(bx+c)e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[-b\sin(bx+c) + a\cos(bx+c)]$$

उदाहरण 28.5. यदि $y = \dfrac{e^{ax}}{\sin(bx+c)}$ हो, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

हल :
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(bx+c)\frac{d}{dx}e^{ax}-e^{ax}\frac{d}{dx}[\sin(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}$$
$$=\frac{\sin(bx+c).e^{ax}.a-e^{ax}\cos(bx+c).b}{\sin^2(bx+c)}$$
$$=\frac{e^{ax}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}$$

देखें आपने क्या सीखा 28.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) e^{5x} (b) e^{7x+4} (c) $e^{\sqrt{2}x}$ (d) $e^{\frac{-7}{2}x}$ (e) e^{x^2+2x}

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y=\frac{1}{3}e^x-5e$ (b) $y=\tan x+2\sin x+3\cos x-\frac{1}{2}e^x$

   (c) $y=5\sin x-2e^x$ (d) $y=e^x+e^{-x}$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x)=e^{\sqrt{x+1}}$ (b) $f(x)=e^{\sqrt{\cot x}}$

   (c) $f(x)=e^{x\sin^2 x}$ (d) $f(x)=e^{x\sec^2 x}$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x)=(x-1)e^x$ (b) $f(x)=e^{2x}\sin^2 x$

5. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y=\frac{e^{2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $y=\frac{e^{2x}\cdot\cos x}{x\sin x}$

28.2 लघुगुणकीय फलनों का अवकलज

हम पहले लघुगणकीय फलन लेते हैं

मान लीजिए कि $y=\log x$ .....(i)

$\therefore \quad y+\delta y=\log(x+\delta x)$ .....(ii)

(x तथा y में संगत बढ़ोत्तरियां क्रमशः δx तथा δy हैं)

(i) तथा (ii) से हमें मिलता है :

$$\delta y=\log(x+\delta x)-\log x=\log\frac{x+\delta x}{x}$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\delta x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right] \qquad \text{(x से गुणा तथा भाग करने पर)}$$

$$= \frac{1}{x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]^{\frac{x}{\delta x}}$$

दोनों पक्षों की सीमा लेने पर, जब $\delta x \to 0$, हमें मिलता है

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\delta x\to 0}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]^{\frac{x}{\delta x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\log\left\{\lim_{\delta x\to 0}\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}}\right\} = \frac{1}{x}\log e \qquad \left[\because \lim_{\delta x\to 0}\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}} = e\right]$$

$$= \frac{1}{x}$$

अत: $$\mathbf{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$$

अब हम लघुगणकीय फलन $y = \log(ax+b)$ लेते हैं। ...(i)

$$\therefore \qquad y + \delta y = \log[a(x+\delta x)+b] \qquad ...(ii)$$

(i) तथा (ii) से हमें मिलता है

$$\delta y = \log[a(x+\delta x)+b] - \log(ax+b)$$

$$= \log\frac{a(x+\delta x)+b}{ax+b} = \log\frac{(ax+b)+a\delta x}{ax+b} = \log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

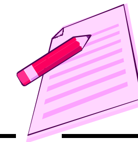
$$= \frac{a}{ax+b}\cdot\frac{ax+b}{a\delta x}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right] \qquad \left[\frac{a}{ax+b}\text{ से गुणा तथा भाग करने पर}\right]$$

$$= \frac{a}{ax+b}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]^{\frac{ax+b}{a\delta x}}$$

दोनों पक्षों की सीमा लेने पर, जब $\delta x \to 0$,

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a}{ax+b}\lim_{\delta x\to 0}\log\left[1+\frac{a\delta x}{ax+b}\right]^{\frac{ax+b}{a\delta x}}$$

अर्थात $$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}\log e \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\right]$$



टिप्पणी

अथवा $$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{ax+b}$$

कार्यकारी नियमः

$$\frac{d}{dx}\log(ax+b)=\frac{1}{ax+b}\frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$=\frac{1}{ax+b}\times a=\frac{a}{ax+b}$$

उदाहरण 28.6. नीचे दिये गये फलनों में प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y=\log x^5$ (ii) $y=\log\sqrt{x}$ (iii) $y=(\log x)^3$

हल : (i) $y=\log x^5=5\log x$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=5\cdot\frac{1}{x}=\frac{5}{x}$$

(ii) $y=\log\sqrt{x}\ =\log x^{\frac{1}{2}}$ अथवा $y=\frac{1}{2}\log x$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$$

(iii) $y=(\log x)^3$

$\therefore$ $y=t^3,$ जहाँ $t=\log x$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dt}=3t^2$ तथा $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

हमें पता है कि, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=3t^2\cdot\frac{1}{x}$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x}(\log x)^2$$

उदाहरण 28.7. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $y=x^3\log x$ (ii) $y=e^x\log x$

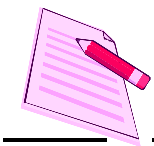
हल : (i) $y=x^3\log x$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\log x\frac{d}{dx}(x^3)+x^3\frac{d}{dx}(\log x)$$ (गुणन नियम के उपयोग से)

$$=3x^2\log x+x^3\cdot\frac{1}{x}=x^2(3\log x+1)$$

(ii) $y=e^x\log x$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=e^x\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\cdot\frac{d}{dx}e^x$$



$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \log x = e^x \left[\frac{1}{x} + \log x \right]$$

उदाहरण 28.8. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $\log \tan x$ (ii) $\log [\cos (\log x)]$

हल: (i) मान लीजिए कि $y = \log \tan x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{cosec} x . \sec x$$

(ii) मान लीजिए कि $y = \log [\cos (\log x)]$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(\log x)} \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\log x)] = \frac{1}{\cos(\log x)} \cdot \left[-\sin \log x \frac{d}{dx}(\log x) \right]$$

$$= \frac{-\sin(\log x)}{\cos(\log x)} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \tan(\log x)$$

उदाहरण 28.9. यदि $y = \log(\sec x + \tan x)$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \log (\sec x + \text{tax } x)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \left[\sec x \tan x + \sec^2 x \right]$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \sec x [\sec x + \tan x]$$

$$= \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

उदाहरण 28.10. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि $y = \frac{(4x^2 - 1)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3 (x - 7)^{\frac{3}{4}}}$ हो।

हल : यद्यपि आप भाग नियम (गुणन नियम) का सीधा उपयोग करके भी अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। परन्तु यदि आप दोनों पक्षों का लघुगणक लेगें तो गुणा, योग में बदल जायेगी तथा भाग, घटा में। इससे विधि आसान हो जाती है।

$$y = \frac{(4x^2 - 1)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3 (x - 7)^{\frac{3}{4}}}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$\therefore$ $$\log y=\log\left[\frac{\left(4x^2-1\right)\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^3\left(x-7\right)^{\frac{3}{4}}}\right]$$

अथवा $$\log y=\log\left(4x^2-1\right)+\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)-3\log x-\frac{3}{4}\log(x-7)$$

(log के गुणधर्मो का उपयोग करने पर)

अब दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{1}{4x^2-1}\cdot 8x+\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot 2x-\frac{3}{x}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-7}\right)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{8x}{4x^2-1}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{x}-\frac{3}{4\left(x-7\right)}$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{8x}{4x^2-1}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{x}-\frac{3}{4(x-7)}\right]$$

$$=\frac{(4x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^3(x-7)^{\frac{3}{4}}}\left[\frac{8x}{4x^2-1}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{x}-\frac{3}{4(x-7)}\right]$$

देखें आपने कितना सीखा 28.2

1. नीचे दिये गये प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x)=5\sin x-2\log x$ (b) $f(x)=\log\cos x$

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y=e^{x^2}\log x$ (b) $y=\frac{e^{x^2}}{\log x}$

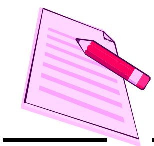
3. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y=\log(\sin\log x)$ (b) $y=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

   (c) $y=\log\left[\frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}\right]$ (d) $y=\log(\log x)$

4. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y=(1+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{2}{3}}(x^2+5)^{\frac{1}{7}}(x+9)^{-\frac{3}{2}}$ (b) $y=\frac{\sqrt{x}(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{(3+4x)^{\frac{5}{4}}(3-7x^2)^{\frac{1}{4}}}$



28.3 कुछ और लघुगणकीय फलनों के अवकलज

हम जानते हैं कि x के सापेक्ष x^n का अवकलज nx^{n-1} होता है जहाँ n एक स्थिरांक है। यदि घातांक भी चरांक हो, तो यह नियम लागू नहीं होता। ऐसी स्थिति में हम फलन का लघुगणक लेते हैं और तब उसका अवकलज ज्ञात करते हैं।

इसलिए यह क्रिया तभी लाभप्रद है जबकि दिया गया फलन $[f(x)]^{g(x)}$ के प्रकार का होता है।

उदाहरणतया a^x, x^x इत्यादि।

टिप्पणी: यहाँ $f(x)$ एक अचर हो सकता है।

a^x का x के सापेक्ष अवकलज

माना $\quad y = a^x, \quad a > 0$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, हमें मिलता है

$$\log y = \log a^x = x \log a \qquad [\log m^n = n \log m]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x \log a) \quad \text{अथवा} \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log a \times \frac{d}{dx}(x)$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = y \log a = a^x \log a$$

अत: $$\mathbf{\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a}, \qquad a > 0$$

उदाहरण 28.11. निम्नलिखित फलनों में प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) $y = x^x$ (ii) $y = x^{\sin x}$

हल : (i) $\quad y = x^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$$\log y = x \log x$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \log x \frac{d}{dx}(x) + x \frac{d}{dx}(\log x) \qquad \text{[गुणन नियम के प्रयोग से]}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y[\log x + 1] = x^x(\log x + 1)$$

(ii) $\quad y = x^{\sin x}$

दोनों पक्षों का लघु लेने पर हमें मिलता है

$$\log y = \sin x \log x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log x)$$

अथवा $$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\cos x.\log x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=y\left[\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right]$$

अत: $$\frac{dy}{dx}=x^{\sin x}\left[\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right]$$

उदाहरण 28.12. यदि $y=(\log x)^x+\left(\sin^{-1}x\right)^{\sin x}$ हो, तो इसका अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : दोनों पक्षों का लघुगणक लेना लाभदायक नहीं क्योंकि हम योग को गुणन में नहीं बदल सकते तथा दिये गये योग का लघुगणक नहीं लिया जा सकता।

अत: हम $u=(\log x)^x$ तथा $v=(\sin^{-1}x)^{\sin x}$ लेते हैं

तब $$y=u+v$$

$\therefore$ $$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx} \qquad \text{......(i)}$$

अब $$u=(\log x)^x$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, हमें मिलता है

$$\log u=\log(\log x)^x$$

$\therefore$ $$\log u=x\log(\log x) \qquad \left[\because \log m^n=n\log m\right]$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}=1\cdot\log(\log x)+x\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$$

अत: $$\frac{du}{dx}=u\left[\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right]$$

$$\frac{du}{dx}=(\log x)^x\left[\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right] \qquad \text{.....(ii)}$$

और $$v=(\sin^{-1}x)^{\sin x}$$

$\therefore$ $$\log v=\sin x\log(\sin^{-1}x)$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(\log v)=\frac{d}{dx}[\sin x\log(\sin^{-1}x)]$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\sin x\cdot\frac{1}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\cos x\cdot\log\left(\sin^{-1}x\right)$$

अथवा $$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sin x}{\sin^{-1}x} + \cos x \cdot \log\sin^{-1}x\right]$$

$$= \left(\sin^{-1}x\right)^{\sin x}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sin x}{\sin^{-1}x} + \cos x \log\left(\sin^{-1}x\right)\right] \quad ....(iii)$$

(i), (ii) तथा (iii) से हमें मिलता है,

$$\frac{dy}{dx} = (\log x)^x\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right] + \left(\sin^{-1}x\right)^{\sin x}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sin x}{\sin^{-1}x} + \cos x \log\sin^{-1}x\right]$$

उदाहरण 28.13. यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

हल : दिया है कि $x^y = e^{x-y}$ .....(i)

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है :

$$y\log x = (x-y)\log e = (x-y)$$

अथवा $$y(1+\log x) = x \qquad [\because \ \log e = 1]$$

अथवा $$y = \frac{x}{1+\log x} \quad .....(ii)$$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)\cdot 1 - x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2} = \frac{1+\log x - 1}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

उदाहरण 28.14. यदि $e^x \log y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया गया है कि $e^x \log y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$e^x\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right) + e^x \log y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$\left[\frac{e^x}{y} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - e^x \log y$$

अथवा $$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{1-y^2}\left[1 - e^x\sqrt{1-x^2}\log y\right]}{\left[e^x\sqrt{1-y^2} - y\right]\sqrt{1-x^2}}$$

उदाहरण 28.15. यदि $y = (\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)......\infty}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया गया है कि $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\ldots\infty}}=(\cos x)^{y}$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$$\log y = y \log \cos x \qquad \ldots\ldots(i)$$

(i) का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x)+\log(\cos x)\cdot\frac{dy}{dx}$$

अथवा $$\left[\frac{1}{y}-\log(\cos x)\right]\frac{dy}{dx}=-y\tan x$$

अथवा $$\left[1-y\log(\cos x)\right]\frac{dy}{dx}=-y^{2}\tan x$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^{2}\tan x}{1-y\log(\cos x)}$$

देखें आपने क्या सीखा 28.3

1. नीचे दिये गये फलनों में प्रत्येक का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y=5^{x}$ (b) $y=3^{x}+4^{x}$ (c) $y=\sin(5^{x})$

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y=x^{2x}$ (b) $y=(\cos x)^{\log x}$ (c) $y=(\log x)^{\sin x}$

   (d) $y=(\tan x)^{x}$ (e) $y=(1+x^{2})^{x^{2}}$ (f) $y=x^{(x^{2}+\sin x)}$

3. नीचे दिये गये फलनों में प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y=(\tan x)^{\cot x}+(\cot x)^{x}$ (b) $y=x^{\log x}+(\sin x)^{\sin^{-1}x}$

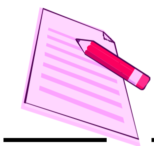
   (c) $y=x^{\tan x}+(\sin x)^{\cos x}$ (d) $y=(x)^{x^{2}}+(\log x)^{\log x}$

4. यदि $y=(\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\ldots\ldots\infty}}$ हो, तो दर्शाइए कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{2}\cot x}{1-y\log(\sin x)}$$

5. यदि $y=\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\ldots\ldots\infty}}}$ हो, तो दर्शाइए कि

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(2x-1)}$$



28.4 द्वितीय कोटि (Second order) के अवकलज

पिछले पाठ में हमने त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज (Second order derivatives), त्रिकोणमितीय तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के सूत्रों का उपयोग करके ज्ञात किये थे। इनमें हमने अवकलजों के विभिन्न नियमों (laws) जिसमें श्रृखंला नियम (chain rule) तथा घात नियम का उपयोग किया गया था। इसी प्रकार हम चरघांताकी तथा लघुगणकीय फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 28.16. नीचे दिये फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए :

(i) e^x (ii) $\cos(\log x)$ (iii) x^x

हलः (i) मान लीजिए कि $y = e^x$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad .....(i)$$

(i) का फिर x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

(ii) मान लीजिए कि $y = \cos(\log x)$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{-\sin(\log x)}{x}$$

एक बार फिर x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{\sin(\log x)}{x}\right]$$

अथवा
$$= -\frac{x\cdot\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x} - \sin(\log x)}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}$$

(iii) मान लीजिए कि $y = x^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर हमें मिलता है

$$\log y = x\log x \qquad ....(i)$$

(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x$$

अथवा
$$\frac{dy}{dx} = y(1+\log x) \qquad ....(ii)$$

(ii) का x के सापेक्ष फिर अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[y(1+\log x)] = y \cdot \frac{1}{x} + (1+\log x)\frac{dy}{dx} \qquad \text{...(iii)}$$

$$= \frac{y}{x} + (1+\log x)y(1+\log x)$$

$$= \frac{y}{x} + (1+\log x)^2 y = y\left[\frac{1}{x} + (1+\log x)^2\right]$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = x^x\left[\frac{1}{x} + (1+\log x)^2\right]$$

उदाहरण 28.17. यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$ है, तो दर्शाईये कि $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$

हल : हमें दिया है $y = e^{a\cos^{-1}x}$ .....(i)

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = e^{a\cos^{-1}x} \cdot \frac{-a}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$$ (i) का प्रयोग करके

अथवा $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2y^2}{1-x^2}$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(1-x^2\right) - a^2y^2 = 0 \qquad \text{.....(ii)}$$

(ii) के दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(-2x) + 2\left(1-x^2\right) \times \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - a^2 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$ (सब पदों को $2 \cdot \frac{dy}{dx}$ से भाग देने पर)

देखें आपने कितना सीखा 28.4

1. निम्नलिखित में प्रत्येक का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) x^4e^{5x} (b) $\tan\left(e^{5x}\right)$ (c) $\frac{\log x}{x}$

2. यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ हो, तो दर्शाइए कि

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

3. यदि $y = e^{\tan^{-1} x}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(2x-1\right)\frac{dy}{dx}=0$$

28.5 प्राचलिक फलनों का अवकलन

कभी–कभी x तथा y दो चर इस प्रकार होते हैं जिन्हें किसी तीसरे चर, जिसे t कह सकते हैं, में स्पष्ट रूप से व्यक्त करते हैं। अर्थात् यदि $x = f(t)$ तथा $y = g(t)$ हों, तो इस प्रकार के फलन प्राचलिक–फलन कहलाते हैं तथा तीसरा चर प्राचल कहलाता है।

प्राचलिक रूप में फलनों का अवकलन प्राप्त करने के लिए, हम शृंखला नियम का प्रयोग करते हैं।

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ जहाँ } \frac{dx}{dt}\neq 0$$

जब $x = a \sin t,\ y = a \cos t$ है तो, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = a \cos t \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = -a\sin t$$

परन्तु $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-a\sin t}{a\cos t} = -\tan t$$

उदाहरण 28.19. यदि $x = 2at^2$ तथा $y = 2at$ है तो, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $x = 2at^2$ तथा $y = 2at$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = 4at \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = 2a$$

परन्तु $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{4at} = \frac{1}{2t}$$

उदाहरण 28.20. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि $x = a(\theta - \sin\theta)$ तथा $y = a(1+\cos\theta)$ है।

हल : दिया है $$x = a(\theta - \sin\theta) \text{ तथा}$$

$$y = a(1+\cos\theta)$$

दोनों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = a(-\sin\theta)$$

परन्तु $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = -\cot\theta/2$$

उदाहरण 28.21. यदि $x = a\cos^3 t$ तथा $y = a\sin^3 t$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $x = a\cos^3 t$ तथा $y = a\sin^3 t$

दोनों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = 3a\cos^2 t\frac{d}{dt}(\cos t) = -3a\cos^2 t\sin t$$

तथा $$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\frac{d}{dt}(\sin t) = 3a\sin^2 t\cos t$$

परन्तु $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

उदाहरण 28.22. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$ तथा $y = \frac{2bt}{1+t^2}$ है।

हल : दिया है $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$ तथा $y = \frac{2bt}{1+t^2}$

दोनों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = a\left\{\frac{(1+t^2).(0-2t)-(1-t^2)(0+2t)}{(1+t^2)^2}\right\} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}$$

तथा $$\frac{dy}{dt} = 2b\left\{\frac{(1+t^2).(1)-t.(0+2t)}{(1+t^2)^2}\right\} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

परन्तु $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\times\frac{(1+t^2)^2}{-4at} = \frac{-b(1-t^2)}{2at}$$

देखें आपने कितना सीखा 28.5

$\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जब :

1. $x = 2at^3$ तथा $y = at^4$
2. $x = a\cos\theta$ तथा $y = a\sin\theta$
3. $x = 4t$ तथा $y = \frac{4}{t}$
4. $x = b\sin^2\theta$ तथा $y = a\cos^2\theta$
5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta$ तथा $y = \sin\theta - \sin 2\theta$
6. $x = a\sec\theta$ तथा $y = b\tan\theta$

7. $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$ तथा $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$

8. $x = \sin 2t$ तथा $y = \cos 2t$

28.6 प्राचलिक फलनों का दूसरी कोटि का अवकलज

यदि दो प्राचलिक फलन $x = f(t)$ तथा $y = g(t)$ दिए हैं, तब

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = h(t) \quad (\text{मान लीजिए यहाँ } \frac{dx}{dt} \neq 0)$$

अतः
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}((h(t)) \times \frac{dt}{dx}$$

उदाहरण 28.23. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए, यदि $x = at^2$ तथा $y = 2at$

हल : दोनों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = 2at \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

दोनों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \times \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^2} \times \frac{1}{2at} = -\frac{1}{2at^3}$$

उदाहरण 28.24. यदि $x = a\sin^3\theta$ तथा $y = b\cos^3\theta$ है तो $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $x = a\sin^3\theta$ तथा $y = b\cos^3\theta$

दोनों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta \text{ तथा } \frac{dy}{d\theta} = 3b\cos^2\theta(-\sin\theta)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-3b\cos^2\theta\sin\theta}{3a\sin^2\theta\cos\theta} = -\frac{b}{a}\cot\theta$$

दोनों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a}\frac{d}{dx}(\cot\theta) = \frac{-b}{a}\frac{d}{d\theta}(\cot\theta) \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a}(-\text{cosec}^2\theta) \times \frac{1}{3a\sin^2\theta\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{3a^2}\operatorname{cosec}^4\theta \sec\theta$$

उदाहरण 28.25. यदि $x = a\sin t$ तथा $y = b\cos t$ है तब $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $x = a\sin t$ तथा $y = b\cos t$

दोनों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = a\cos t \text{ तथा } \frac{dy}{dt} = -b\sin t$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-b\sin t}{a\cos t} = \frac{-b}{a}\tan t$$

दोनों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a}\frac{d}{dt}(\tan t)\times\frac{dt}{dx} = \frac{-b}{a}\sec^2 t\times\frac{1}{a\cos t}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a^2}\sec^3 t$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{at\ t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-b}{a^2}\sec^3\frac{\pi}{4} = \frac{-b}{a^2}(\sqrt{2})^3 = \frac{-2\sqrt{2}b}{a^2}$$

देखें आपने कितना सीखा 28.6

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए, जब

1. $x = 2at$ तथा $y = at^2$
2. $x = a(t+\sin t)$ तथा $y = a(1-\cos t)$
3. $x = 10(\theta-\sin\theta)$ तथा $y = 12(1-\cos\theta)$
4. $x = a\sin t$ तथा $y = b\cos 2t$
5. $x = a-\cos 2t$ तथा $y = b-\sin 2t$

आइये दोहराएँ

- (i) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ (ii) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\log a \ ; \ a>0$
- यदि μ x का एक अवकलनीय फलन है, तो

(i) $\frac{d}{dx}(e^{\mu}) = e^{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(a^{\mu}) = a^{\mu} \cdot \log a \cdot \frac{d\mu}{dx}$;$a > 0$

(iii) $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = e^{ax+b} \cdot a = ae^{ax+b}$

- (i) $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

  (ii) यदि μ x का एक अवकलनीय फलन है, तो $\frac{d}{dx}(\log \mu) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$

  (iii) $\frac{d}{dx}\log(ax+b) = \frac{1}{ax+b} \cdot a = \frac{a}{ax+b}$

- यदि $x = f(t)$ and $u = g(t)$ तो $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{du/dt}$, जहां $\frac{dx}{dt} \neq 0$
- यदि $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = h(t)$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}[h(t)] \times \frac{dt}{dx}$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.themathpage.com/acalc/exponential.htm*
- *http://www.math.brown.edu/utra/explog.html*
- *http://www.freemathhelp.com/derivative-log-exponent.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $(x^x)^x$ (b) $x^{\left(x^x\right)}$

2. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $y = a^{x \log \sin x}$ (b) $y = (\sin x)^{\cos^{-1} x}$

   (c) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ (d) $y = \log\left[e^x \left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{\frac{3}{4}}\right]$

3. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $f(x) = \cos x \log(x) e^{x^2} x^x$ (b) $f(x) = (\sin^{-1} x)^2 \cdot x^{\sin x} \cdot e^{2x}$

4. निम्नलिखित में प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

   (a) $y = (\tan x)^{\log x} + (\cos x)^{\sin x}$ (b) $y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$

5. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $y = \frac{x^4\sqrt{x+6}}{(3x+5)^2}$ (b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})}$

6. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $y = a^x \cdot x^a$ (b) $y = 7^{x^2+2x}$

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए :

(a) $y = x^2 e^{2x}\cos 3x$ (b) $y = \frac{2^x \cot x}{\sqrt{x}}$

8. यदि $y = x^{x^{x^{x.......\infty}}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}$

निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए

9. $(\sin)^{\cos x}$ 10. $(\log x)^{\log x}$ 11. $\frac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)}$ 12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(x+\frac{1}{x}\right)}$

$\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जब :

13. $x = a\left(\cos t + \log\frac{t}{2}\right)$ तथा $y = a\sin t$

14. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ तथा $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

15. $x = e^t(\sin t + \cos t)$ तथा $y = e^t(\sin t - \cos t)$

16. $x = e^{\cos 2t}$ तथा $y = e^{\sin 2t}$

17. $x = a\left(t + \frac{1}{t}\right)$ तथा $y = a\left(t - \frac{1}{t}\right)$

18. यदि $x = a(\theta - \sin\theta)$ तथा $y = a(1+\cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

19. यदि $x = \frac{2bt}{1+t^2}$ तथा $y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ है, तो t = 2 पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

20. यदि $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ तथा $y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\cot 3t$

21. यदि $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$ तथा $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$ है, तो सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{3\theta}{2}\right)$

22. यदि $x = \cos t$ तथा $y = \sin t$ है, तो $t = \frac{2\pi}{3}$ पर सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

23. यदि $x = a(\cos t + t\sin t)$ तथा $y = a(\sin t - t\cos t)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

24. यदि $x = a(\theta - \sin\theta)$ तथा $y = a(1+\cos\theta)$ है, तो $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

25. यदि $x = a\sin pt$ तथा $y = b\cos pt$ है, तो $t = 0$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

26. यदि $x = \log t$ तथा $y = \frac{1}{t}$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

27. यदि $x = a(1+\cos t)$ तथा $y = a(t+\sin t)$ है, तो $t = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

28. यदि $x = at^2$ तथा $y = 2at$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 28.1

1. (a) $5e^{5x}$ (b) $7e^{7x+4}$ (c) $\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$ (d) $-\frac{7}{2}e^{-\frac{7}{2}x}$ (e) $2(x+1)e^{x^2+2x}$

2. (a) $\frac{1}{3}e^x$ (b) $\sec^2 x + 2\cos x - 3\sin x - \frac{1}{2}e^x$
   (c) $5\cos x - 2e^x$ (d) $e^x - e^{-x}$

3. (a) $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$ (b) $e^{\sqrt{\cot x}}\left[\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{2\sqrt{\cot x}}\right]$
   (c) $e^{x\sin^2 x}[\sin x + 2x\cos x]\sin x$
   (d) $e^{x\sec^2 x}\left[\sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x\right]$

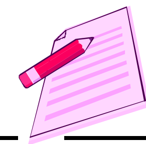
4. (a) xe^x (b) $2e^{2x}\sin x(\sin x + \cos x)$

5. (a) $\frac{2x^2 - x + 2}{(x^2+1)^{3/2}}e^{2x}$ (b) $\frac{e^{2x}[(2x-1)\cot x - x\operatorname{cosec}^2 x]}{x^2}$

देखें आपने कितना सीखा 28.2

1. (a) $5\cos x - \frac{2}{x}$ (b) $-\tan x$

2. (a) $e^{x^2}\left[2x\log x + \frac{1}{x}\right]$ (b) $\frac{2x^2\log x - 1}{x(\log x)^2}.e^{x^2}$



3. (a) $\dfrac{\cot(\log x)}{x}$ (b) $\sec x$

(c) $\dfrac{2ab\sec^2 x}{a^2-b^2\tan^2 x}$ (d) $\dfrac{1}{x\log x}$

4. (a) $(1+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{2}{3}}(x^2+5)^{\frac{1}{7}}(x+9)^{-\frac{3}{2}}\times\left[\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{2}{3(2-x)}+\dfrac{2x}{7(x^2-5)}-\dfrac{3}{2(x+9)}\right]$

(b) $\dfrac{\sqrt{x}(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{(3+4x)^{\frac{5}{4}}(3-7x^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{1-2x}-\dfrac{5}{3+4x}+\dfrac{7x}{2(3-7x^2)}\right]$

देखें आपने कितना सीखा 28.3

1. (a) $5^x\log 5$ (b) $3^x\log 3+4^x\log 4$ (c) $\cos 5^x 5^x\log 5$

2. (a) $2x^{2x}(1+\log x)$ (b) $(\cos x)^{\log x}\left[\dfrac{\log\cos x}{x}-\tan x\log x\right]$

(c) $(\log x)^{\sin x}\left[\cos x\log(\log x)+\dfrac{\sin x}{x\log x}\right]$

(d) $(\tan x)^x\left[\log\tan x+\dfrac{x}{\sin x\cos x}\right]$

(e) $(1+x)^{x^2}\left[2x\log(1+x^2)+2\dfrac{x^3}{1+x^2}\right]$

(f) $x^{(x^2+\sin x)}\left[\dfrac{x^2+\sin x}{x}+(2x+\cos x)\log x\right]$

3. (a) $\operatorname{cosec}^2 x(1-\log\tan x)(\tan x)^{\cot x}+\left(\log\cot x-x\operatorname{cosec}^2 x\tan x\right)(\cot x)^x$

(b) $2x^{(\log x-1)}\log x+(\sin x)^{\sin^{-1}x}\left[\cot x\sin^{-1}x+\dfrac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $x^{\tan x}\left(\dfrac{\tan x}{x}+\sec^2 x\log x\right)+(\sin x)^{\cos x}[\cos x\cot x-\sin x\log\sin x]$

(d) $(x)^{x^2}\cdot x(1+2\log x)+(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1+\log(\log x)}{x}\right]$

देखें आपने कितना सीखा 28.4

1. (a) $e^{5x}\left(25x^4+40x^3+12x^2\right)$ (b) $25e^{5x}\sec^2\left(e^{5x}\right)\left\{1+2e^{5x}\tan e^{5x}\right\}$

(c) $\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

देखें आपने कितना सीखा 28.5

1. $\dfrac{2t}{3}$ 2. $-\cot\theta$ 3. $-\dfrac{1}{t^2}$

4. $-\dfrac{a}{b}$ 5. $\dfrac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta - \sin\theta}$ 6. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$

7. $\dfrac{2t}{1-t^2}$ 8. $-\tan 2t$

देखें आपने कितना सीखा 28.6

1. $\dfrac{1}{2a}$ 2. $\dfrac{\sec^4 t/2}{4a}$ 3. $\dfrac{-3}{100}\operatorname{cosec}^4 \theta/2$

4. $\dfrac{-4b}{a^2}$ 5. $\operatorname{cosec}^3 2t$

आइए अभ्यास करें

1. (a) $(x^x)^x[x + 2x\log x]$ (b) $x^{(x)^x}[x^{x-1} + \log x(\log x + 1)x^x]$

2. (a) $a^{x\log\sin x}[\log\sin x + x\cot x]\log a$

(b) $(\sin x)^{\cos^{-1}x}\left[\cos^{-1}x\cot x - \dfrac{\log\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\left[2x\log\left(x+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right]$ (d) $1 + \dfrac{3}{4(x-4)} - \dfrac{3}{4(x+4)}$

3. (a) $\cos x\log(x)e^{x^2}\cdot x^x\left[-\tan x + \dfrac{1}{x\log x} + 2x + 1 + \log x\right]$

(b) $(\sin^{-1}x)^2.x^{\sin x}e^{2x}\left[\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x} + \cos x\log x + \dfrac{\sin x}{x} + 2\right]$

4. (a) $(\tan x)^{\log x}\left[2\operatorname{cosec} 2x\log x + \dfrac{1}{x}\log\tan x\right]$

$+(\cos x)^{\sin x}[-\sin x\tan x + \cos x\log(\cos x)]$

(b) $x^{\tan x}\left[\dfrac{\tan x}{x} + \sec^2 x\log x\right] + (\sin x)^{\cos x}[\cot x\cos x - \sin x\log\sin x)]$

5. (a) $\dfrac{x^4\sqrt{x+6}}{(3x+5)^2}\left[\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{2(x+6)} - \dfrac{6}{(3x+5)}\right]$ (b) $\dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

6. (a) $a^x . x^{a-1}[a + x\log_e a]$ (b) $7^{x^2+2x}(2x+2)\log_e 7$

7. (a) $x^2e^{2x}\cos 3x\left\{\frac{2}{x}+2-3\tan 3x\right\}$

(b) $\frac{2^x \cot x}{\sqrt{x}}\left[\log 2 - 2\operatorname{cosec} 2x - \frac{1}{2x}\right]$

9. $(\sin x)^{\cos x}[-\sin x \log\cos x + \cos x \cot x]$ 10. $(\log x)^{\log x}\left[\frac{\log(\log x)+1}{x}\right]$

11. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}\right]$

12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\log\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]+x^{x+\frac{1}{x}}\left[\frac{x^2-1}{x^2}\log x+\frac{x^2+1}{x^2}\right]$

13. $\tan t$ 14. $\tan\theta$ 15. $\tan t$ 16. $\frac{-y\log x}{x\log y}$

17. $\frac{x}{y}$ 18. $-\sqrt{3}$ 19. $\frac{4a}{3b}$ 20. $\frac{\sec^3\theta}{a\theta}$

21. $\frac{1}{a}$ 22. $\frac{-b}{a^2}$ 23. $\frac{1}{t}$ 24. $\frac{-1}{a}$

25. $\frac{-1}{2at^3}$ 26. $\frac{-1}{t}$ 27. -2 28. $\frac{1}{t}$

29

अवकलज के अनुप्रयोग

पिछले पाठ में हमने विभिन्न प्रकार के फलनों का अवकलज ज्ञात करना सीख था। अब हम अवकलज के प्रयोग से राशियों के परिवर्तन की दर फलनों का सन्निकट मान, वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान तथा विभिन्न अंतरालों में फलनों के वर्धमान या ह्रासमान होने का अध्ययन करेंगे। हम रोले के प्रमेय तथा माध्यमान प्रमेय तथा उनके अनुप्रयोगों के बारे में भी सीखेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- राशियों के परिवर्तन की दर ज्ञात करना
- फलनों का सन्निकट मान ज्ञात करना
- किसी वक्र (फलन के आलेख) कि किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब को परिभाषित करना।
- दिये गये प्रतिबंध (conditions) के अन्तर्गत एक वक्र पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात करना।
- एकदिष्ट (वर्धमान/ह्रासमान) फलनों को परिभाषित करना
- एक अन्तराल में वर्धमान फलनों के लिए $\frac{dy}{dx} > 0$ तथा ह्रासमान फलनों के लिए $\frac{dy}{dx} < 0$ स्थापित करना
- आलेख से एक दिये गये अन्तराल में एक फलन के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों वाले (स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ सहित) बिन्दुओं को परिभाषित करना
- फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ उनके प्रथम अवकलज तथा द्वितीय अवकलज का उपयोग करके ज्ञात करने के लिए एक कार्यकारी नियम (working rule) स्थापित करना
- उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ पर सरल प्रश्न हल करना
- रोले के प्रमेय तथा माध्यमान प्रमेय का वर्णन करना, तथा
- उपरोक्त प्रमेयों की वैधता (validity) की जाँच करना, तथा उन्हें विभिन्न प्रश्नों को हल करने में प्रयोग करना।

पूर्व ज्ञान

- निर्देशांक ज्यामिति का ज्ञान
- किसी वक्र पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की संकल्पना
- विभिन्न फलनों के अवकल गुणांकों की संकल्पना
- किसी फलन के किसी बिन्दु पर अवकलज का ज्यामितीय अर्थ

29.1 राशियों के परिवर्तन की दर

मान लीजिए $y = f(x)$, x का एक फलन है तथा मान लीजिए कि x में एक छोटा–सा परिवर्तन Δx है, एवं y में संगत परिवर्तन Δy है।

$\therefore$ x के सापेक्ष, y का प्रति इकाई औसत परिवर्तन $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

इस प्रकार $\Delta x \to 0$, x के सापेक्ष, y के औसत परिवर्तन की दर का सीमांत मान है

इसलिए x के सापेक्ष, y में प्रति इकाई परिवर्तन की दर = $\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

अतः $\dfrac{dy}{dx}$, x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर प्रदर्शित करता है।

इस प्रकार $x = x_0$ पर $\dfrac{dy}{dx}$ का मान, अर्थात् $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0)$

$f'(x_0)$, $x = x_0$ पर x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है।

इसके अतिरिक्त यदि दो राशियाँ x तथा y, t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात् $y = f(t)$ और $x = g(t)$ है तब शृंखला नियम से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \frac{dx}{dt} \neq 0$$

अतः x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर का परिकलन t के सापेक्ष y और x के परिवर्तन की दर का प्रयोग करके किया जा सकता है।

उदाहरण 29.1. वृत के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी चर त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए, जब $r = 3$ सेमी.

हल : मान लीजिए r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल A है

तब $$A = \pi r^2$$

$\therefore$ r के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$$

जब $r = 3$ सेमी., $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi \times 3 = 6\pi$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल 6π सेमी.^{2}/सेमी. की दर से बदल रहा है।

उदाहरण 29.2. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\dfrac{3}{2}(2x+3)$ है। x के सापेक्ष इसके आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल : गोलाकार (वृत्त की त्रिज्या (r) = $\dfrac{1}{2}$ (व्यास) = $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2}(2x+3) = \dfrac{3}{4}(2x+3)$

मान लीजिए गुब्बारे का आयतन V हैं, तब

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}(2x+3)\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{9}{16}\pi(2x+3)^3$$

$\therefore$ x के सापेक्ष आयतन में परिवर्तन की दर

$$\frac{dV}{dx} = \frac{9}{16}\pi \times 3(2x+3)^2 \times 2 = \frac{27}{8}\pi(2x+3)^2$$

अतः आयतन $\frac{27}{8}\pi(2x+3)^2$ इकाई^3/इकाई की दर से परिवर्तित हो रहा है।

उदाहरण 29.3. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पम्प द्वारा 900 सेमी^{3} गैस प्रति सेकण्ड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब इसकी त्रिज्या 15 सेमी. है।

हल : मान लीजिए गोलीय गुब्बारे की त्रिज्या r तथा किसी भी समय t में इसका आयतन V है, तब

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right).\frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{4}{3}\pi.3r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

परन्तु $\frac{dV}{dt} = 900$ सेमी^{3}/सेकन्ड (दिया है)

इसलिए $4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 900$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{900}{4\pi r^2} = \frac{225}{\pi r^2}$$

जब $r = 15$ सेमी.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{225}{\pi \times 15^2} = \frac{1}{\pi}$$

अतः गोले की त्रिज्या $\frac{1}{\pi}$ सेमी./से., की दर से बढ़ रही है, जब इसकी त्रिज्या 15 सेमी. है।

उदाहरण 29.4. एक 5 मी. लम्बी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2सेमी/सेकन्ड की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मी. दूर है?

हल : मान लीजिए सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से x मी. की दूरी पर है तथा किसी समय t पर सीढ़ी की लम्बाई y मीटर है, तब

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{...(i)}$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

परन्तु $\qquad \dfrac{dx}{dt} = 2$ मी/सेकन्ड (दिया है)

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\times 2 = -\frac{2x}{y} \qquad \text{...(ii)}$$

जब $x = 4$मी, (i) से $y^2 = 25 - 16 \Rightarrow y = 3$मी

समीकरण (ii) में $x = 4$मी तथा $y = 3$मी रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\times 4}{3} = \frac{-8}{3}$$

अतः दीवार पर सीढ़ी की ऊँचाई $\dfrac{8}{3}$ मी/सेकन्ड की दर से घट रही है।

उदाहरण 29.5. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x) = 10x^2 + 13x + 24$ से प्रदत्त है/दी गई है। जब $x = 5$ हो तो सीमांत आय ज्ञात कीजिए जहाँ सीमान्त आय से हमारा तात्पर्य किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष सम्पूर्ण आय के परिवर्तन की दर से है।

हल : दिया है $R(x) = 10x^2 + 13x + 24$

क्योंकि सीमांत आय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष आय परिवर्तन की दर से होती है। हम जानते हैं कि

सीमांत आय (MR) = $\dfrac{dR}{dx} = 20x + 13$

जब $x = 5$, $MR = 20 \times 5 + 13 = 113$

अतः अभीष्ट सीमांत आय = ₹ 113

उदाहरण 29.6. किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत

$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जब 17 इकाई उत्पादित की जाती है, जहाँ सीमांत लागत से हमारा तात्पर्य किसी स्तर पर उत्पादन के सम्पूर्ण लागत में तात्कालिक परिवर्तन की दर से है।

हल : दिया है $C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$

क्योंकि सीमांत लागत उत्पादन के किसी स्तर पर सम्पूर्ण लागत के परिवर्तन की दर है, हम प्राप्त करते हैं कि

सीमांत लागत (MC) = $\dfrac{dC}{dx} = 0.007\times 3x^2 - 0.003\times 2x + 15 = 0.021x^2 - 0.006x + 15$

जब x = 17, $\qquad MC = 0.021\times 17^2 - 0.006 \times 17 + 15$

$\qquad = 6.069 - 0.102 + 15 = 20.967$

अतः सीमांत आय $\qquad$ = ₹ 20.967

देखें आपने कितना सीखा 29.1

1. किसी वर्ग की भुजा 4 सेमी/मिनट की दर से घट रही है। यदि वर्ग की भुजा 8 सेमी हो तो, उसका क्षेत्रफल किस दर से घटेगा?
2. एक परिवर्तशील घन का किनारा 3 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 सेमी लम्बा है।

3. वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 6 सेमी है।
4. साबुन के एक गोलीय बुलबुले की त्रिज्या 0.2 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ रही है। इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 7 सेमी है।
5. एक घन के आयतन के परिवर्तन की दर उसकी भुजा के सापेक्ष ज्ञात कीजिए, जबकि भुजा 5 सेमी है।

29.2 सन्निकटन

इस भाग में, हम चिह्न dx तथा dy को एक अर्थ देंगे जिससे चिह्न $\frac{dy}{dx}$ का वास्तविक अर्थ, dy को dx से भाग देना जैसा हो जाए।

मान लीजिए $y = f(x)$, x का एक फलन है तथा Δx, x में एक छोटा सा परिवर्तन है एवं Δy, y में एक संगत बदलाव/परिवर्तन है। तब

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon, \text{ जहाँ } \varepsilon \to 0 \text{ जब } \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

$\because$ $\varepsilon\Delta x$ बहुत ही सूक्ष्म राशि है जिसे नगण्य मान सकते हैं, इसलिए हमें प्राप्त होता है $\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$, सन्निकटतः

यह सूत्र परतंत्र चर के सूक्ष्म परिवर्तन (या त्रुटि) का स्वतंत्र चर के सूक्ष्म परिवर्तन (या त्रुटि) के संगत गणना करने में बहुत ही उपयोगी है।

कुछ महत्वपूर्ण पद

स्वतंत्र/निरपेक्ष त्रुटि : x में त्रुटि Δx, x में निरपेक्ष त्रुटि कहलाती है।

अपेक्षाकृत त्रुटि : यदि x में त्रुटि Δx है तब $\frac{\Delta x}{x}$, x में अपेक्षाकृत त्रुटि कहलाती है।

प्रतिशतता त्रुटि : यदि x में एक त्रुटि Δx है तब $\frac{\Delta x}{x} \times 100$, x में प्रतिशतता त्रुटि कहलाती है।

नोटः हमें ज्ञात है $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \varepsilon.\Delta x$

$\because$ $\varepsilon.\Delta x$ बहुत छोटा/नगण्य है इसलिए Δy का मुख्य मान $= \frac{dy}{dx}\Delta x$ जो कि y का अवकलज कहलाता है।

अर्थात् $$\Delta y = \frac{dy}{dx}.\Delta x$$

$\therefore$ x का अवकलज

$$dx = \frac{dx}{dx}.\Delta x = \Delta x \text{ द्वारा दिया जाता है}$$

अतः
$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

$dx, \Delta x, dy$ तथा Δy का ज्यामितीय व्याख्या/अर्थ जानने के लिए हम वक्र $y = f(x)$ के निकट बिन्दु $P(x, y)$ के क्षेत्र पर अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं जहाँ वक्र पर एक स्पर्श रेखा खींच सकते हैं। यदि वक्र पर एक अन्य बिन्दु $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, $(\Delta x \neq 0)$ है, तब रेखा PQ का ढाल $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ होगा जो कि $\frac{dy}{dx}$ के सीमा मान के सन्निकट है (P पर स्पर्श रेखा का ढाल/झुकाव)

इसलिए, जब $\Delta x \to 0$, Δy, dy के लगभग बराबर/सन्निकट है।

उदाहरण 29.7. अवकलन का प्रयोग करके $\sqrt{25.3}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $y = \sqrt{x}$

'x' के सापेक्ष अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$x = 25$ एवं $x + \Delta x = 25.3$ लीजिए, तब $dx = \Delta x = 0.3$ जब $x = 25$, $y = \sqrt{25} = 5$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{25}} \times 0.3 = \frac{1}{10} \times 0.3 = 0.03$$

$\Rightarrow \Delta y = 0.03$ ($\because$ dy सन्निकटतः Δy के बराबर है)

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{25.3}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{25.3} = 5 + 0.03 = 5.03 \text{ सन्निकटतः}$$

उदाहरण 29.8. अवकलन का प्रयोग करके $(127)^{\frac{1}{3}}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल : $y = x^{\frac{1}{3}}$ लीजिए

मान लीजिए $x = 125$ तथा $x + \Delta x = 127$, तब $dx = \Delta x = 2$

जब $x = 125$, $y = (125)^{\frac{1}{3}} = 5$

अब
$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{3x^{2/3}}dx = \frac{1}{3(125)^{2/3}} \times 2 = \frac{2}{75}$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta y = \frac{2}{75} \qquad (\because \Delta y = dy)$$

अतः $(127)^{\frac{1}{3}} = y + \Delta y = 5 + \frac{2}{75} = 5.026$ (सन्निकट)

उदाहरण 29.9. $f(3.02)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$.

हल : मान लीजिए $x = 3$ तथा $x + \Delta x = 3.02$, तब $dx = \Delta x = 0.02$

हमें ज्ञात है $\quad f(x) = 3x^2 + 5x + 3$

जब $x = 3$

$$\Rightarrow \qquad f(3) = 3(3)^2 + 5(3) + 3 = 45$$

अब $y = f(x)$

$$\Rightarrow \qquad \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x = (6x + 5)\Delta x$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta y = (6 \times 3 + 5) \times 0.02 = 0.46$$

$$\therefore \quad f(3.02) = f(x + \Delta x) = y + \Delta y = 45 + 0.46 = 45.46$$

अतः $f(3.02)$ का सन्निकट मान 45.46.

उदाहरण 29.10. एक गोले की त्रिज्या 9 सेमी मापी जाती है जिसमें 0.03 की त्रुटि है। इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए गोले की त्रिज्या r है इसके मापन में त्रुटि Δr है।

तब $r = 9$ सेमी तथा $\Delta r = 0.03$ सेमी

मान लीजिए गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल S है। तब

$S = 4\pi r^2$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dS}{dr} = 4\pi \times 2r = 8\pi r$$

$$\left(\frac{dS}{dr}\right)_{r=9 \text{ पर}} = 8\pi \times (9) = 72\pi$$

मान लीजिए S में ΔS त्रुटि है, तब

$$\Delta S = \frac{dS}{dr}\Delta r = 72\pi \times 0.03 = 2.16\pi \text{ सेमी}^2$$

अतः पृष्ठीय क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि 2.16π सेमी^{2} है।

उदाहरण 29.11. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 2% की वृद्धि के कारण से घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए x में परिवर्तन Δx तथा V में संगत परिवर्तन ΔV है।

दिया है कि $\dfrac{\Delta x}{x} \times 100 = 2 \Rightarrow \Delta x = \dfrac{2x}{100}$

हमें ज्ञात है $\quad V = x^3$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dV}{dx} = 3x^2$$

$$\text{अब} \qquad \Delta V = \frac{dV}{dx}\Delta x$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta V = 3x^2 \times \frac{2x}{100}$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta V = \frac{6}{100}.V$$

अतः आयतन में सन्निकट परिवर्तन 6% है।

देखें आपने कितना सीखा 29.2

1. अवकलन का प्रयोग करके, $\sqrt{36.6}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
2. अवकलन का प्रयोग करके, $(25)^{\frac{1}{3}}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
3. अवकलन का प्रयोग करके, $(15)^{\frac{1}{4}}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
4. अवकलन का प्रयोग करके, $\sqrt{26}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।
5. एक गोले की त्रिज्या 7 मी मापी जाती है जिसमें 0.02 मी की त्रुटि है। इसके आयतन के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।
6. एक घन के आकार के सन्दूक के आयतन की गणना में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिए यदि सन्दूक की भुजा की माप में 1% की त्रुटि हुई है।

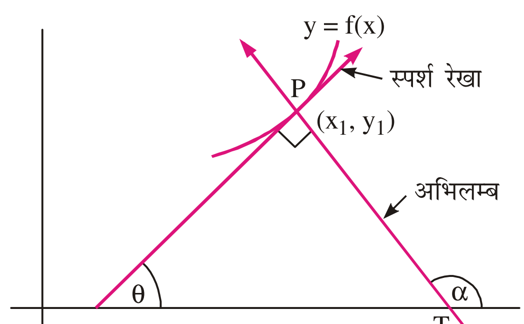
29.3 स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की ढाल

माना $y = f(x)$ एक सतत वक्र है तथा माना $P(x_1, y_1)$ उस पर एक बिन्दु है, तो $P(x_1, y_1)$ पर प्रवणता PT' निम्न द्वारा परिभाषित है

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_1, y_1) \text{ पर} \qquad \ldots(i)$$

तथा (i) का मान $\tan\theta$ के बराबर है।

हम जानते हैं कि किसी वक्र पर अभिलंब एक ऐसी रेखा है जो स्पर्श बिन्दु पर स्पर्श रेखा पर लम्बवत् है



चित्र. 29.1

हम जानते हैं कि $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$

$$\Rightarrow \qquad \tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta = -\frac{1}{\tan\theta}$$

$\therefore$ अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{1}{m} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ बिंदु (x_1, y_1) पर अथवा $-\left(\frac{dx}{dy}\right)$ बिंदु (x_1, y_1) पर।

टिप्पणी

1. किसी वक्र के एक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है यदि $\theta = 0$ है अर्थात उस बिन्दु पर अवकलज का मान शून्य है।

अर्थात्, बिन्दु (x_1, y_1) पर $\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 0$

2. किसी वक्र $y = f(x)$ के एक बिन्दु पर स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है यदि उस बिन्दु पर $\dfrac{dy}{dx} = 0$ है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 29.12. वक्र $x^2 + x^3 + 3xy + y^2 = 6$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र का समीकरण है :

$$x^2 + x^3 + 3xy + y^2 = 6 \qquad .....(i)$$

(i) का अवकलन x के सापेक्ष करने पर हमें मिलता है :

$$2x + 3x^2 + 3\left[x\frac{dy}{dx} + y.1\right] + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

(ii) में $x = 1, y = 1$ रखने पर हमें मिलता है :

$$2\times1 + 3\times1 + 3\left[\frac{dy}{dx} + 1\right] + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $$5\frac{dy}{dx} = -8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{8}{5}$$

स्पर्श रेखा की (1, 1) पर प्रवणता $-\dfrac{8}{5}$ है।

अभिलंब की प्रवणता $\dfrac{5}{8}$ है।

उदाहरण 29.13. दर्शाइए कि वक्र $y = \dfrac{1}{6}\left[3x^5 + 2x^3 - 3x\right]$ पर स्थित बिन्दुओं $x = \pm 3$ पर स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं।

हल : वक्र का समीकरण है, $$y = \frac{3x^5 + 2x^3 - 3x}{6} \qquad .....(i)$$

(i) का अवकलन x के सापेक्ष करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(15x^4 + 6x^2 - 3\right)}{6}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3 \text{ पर}} = \frac{\left[15(3)^4 + 6(3)^2 - 3\right]}{6}$$

$$= \frac{1}{6}[15\times9\times9 + 54 - 3] = \frac{3}{6}[405 + 17] = 211$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right), x=-3 \text{ पर} = \frac{1}{6}\left[15(-3)^4+6(-3)^2-3\right]=211$$

अत: वक्र पर स्थित $x=\pm 3$ पर स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं क्योंकि $x=\pm 3$ पर उनकी प्रवणताएँ समान हैं।

उदाहरण 29.14. वक्र $6y^3=px^2+q$ के बिन्दु $(2,-2)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{1}{6}$ है। p तथा q के मान ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र का समीकरण है : $6y^3=px^2+q$ ...(i)

(i) का अवकलन x के सापेक्ष करने पर हमें मिलता है :

$$18y^2\frac{dy}{dx}=2px \quad .....(ii)$$

$x=2, y=-2$, (ii) में रखने पर

$$18(-2)^2\frac{dy}{dx}=2p\cdot 2=4p$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{18} \text{ यह } \frac{1}{6} \text{ के बराबर है}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{6}=\frac{p}{18}\Rightarrow p=3$$

अत: वक्र का समीकरण बन जाता है : $6y^3=3x^2+q$

बिन्दु (2, –2) वक्र पर स्थित है।

$$\therefore \quad 6(-2)^3=3(2)^2+q$$

$$\Rightarrow \quad -48-12=q \quad \text{अथवा} \quad q=-60$$

$\therefore$ $p=3$, तथा $q=-60$ है

देखें आपने कितना सीखा 29.3

1. निम्नलिखित वक्रों में से प्रत्येक के लिए दिए गए बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं तथा अभिलंबों की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

   (i) $y=x^3-2x$, $x=2$ पर (ii) $x^2+3y+y^2=5$, (1, 1) पर

   (iii) $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ पर

2. यदि वक्र $xy+px+qy=2$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 2 है, तो p तथा q के मान ज्ञात कीजिए।

3. वक्र $x^2+y^2=18$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा $x+y=3$ के समान्तर है।

4. वक्र $y=x^2-4x+5$ के किन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा, रेखा $2y+x-7=0$ के लंबवत है?

29.4 किसी वक्र पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण

हम जानते हैं किसी एक बिन्दु (x_1, y_1) से होकर जाने वाली तथा प्रवणता m वाली रेखा का समीकरण है :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

पिछले परिच्छेद में जैसा हमने पढ़ा था वक्र $y = f(x)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, बिन्दु (x_1, y_1) पर, $\left(\frac{dy}{dx}\right)(x_1, y_1)$ पर द्वारा दिया जाता है तथा अभिलंब की प्रवणता (x_1, y_1) पर $\left(-\frac{dx}{dy}\right)$ है।

$\therefore$ $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है :

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} [x - x_1]$$

तथा $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण है :

$$y - y_1 = \left(\frac{-1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(x_1, y_1)} [x - x_1]$$

टिप्पणी

(i) एक वक्र पर एक स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)\text{पर}} = 0$ है तथा स्पर्श रेखा का समीकरण $y = y_1$ है।

(ii) यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)\text{पर}} \to \infty$ तो (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है तथा उसका समीकरण $x = x_1$ है।

आइए कुछ उदाहरण लेकर इसे स्पष्ट करें।

उदाहरण 29.15. वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ पर स्थित बिन्दु $(4, 3)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का समीकरण है $x^2 + y^2 = 25$ ...(i)

(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,3)\text{ पर}} = -\frac{4}{3}$$

वृत्त के बिन्दु (4, 3) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है :

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-4)$$

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-4)$$

अथवा $\quad 4(x-4)+3(y-3)=0 \quad$ अथवा $\quad 4x+3y=25$

तथा अभिलंब की प्रवणता $= \dfrac{-1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(4,3)}} = \dfrac{3}{4}$

$\therefore$ वृत्त के बिन्दु (4, 3) पर अभिलंब का समीकरण है

$$y-3=\frac{3}{4}(x-4)$$

अथवा $$4y-12=3x-12$$

$$\Rightarrow \qquad 3x=4y$$

$\therefore$ वृत्त पर स्थित बिन्दु (4,3) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $4x + 3y = 25$ है तथा वृत्त पर स्थित बिन्दु (4,3) पर अभिलंब का समीकरण $3x = 4y$ है।

उदाहरण 29.16. वक्र $16x^2+9y^2=144$ पर स्थित बिन्दु (x_1, y_1) पर, जहाँ $y_1>0$ तथा $x_1=2$ है, स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र का समीकरण है : $16x^2+9y^2=144 \qquad$ ...(i)

(i) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$32x+18y\frac{dy}{dx}=0$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=-\frac{16x}{9y}$$

क्योंकि $x_1=2$ है तथा बिंदु (x_1, y_1) वक्र पर स्थित है

$$\therefore \qquad 16(2)^2+9(y^2)=144$$

$$\Rightarrow \qquad y^2=\frac{80}{9} \Rightarrow y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{5}$$

चूँकि $$y_1>0 \Rightarrow y_1=\frac{4}{3}\sqrt{5}$$

अतः, वक्र के बिन्दु $\left(2, \frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण है :

$$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\left(-\frac{16x}{9y}\right)_{\left(2,\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)\text{पर}}[x-2]$$

अथवा $$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=-\frac{16}{9}\cdot\frac{2\times 3}{4\sqrt{5}}(x-2)$$ अथवा $$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}+\frac{8}{3\sqrt{5}}(x-2)=0$$

अथवा $$3\sqrt{5}\ \ y-\frac{4}{3}\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}+8(x-2)=0$$

$$3\sqrt{5}y-20+8x-16=0$$ अथवा $$3\sqrt{5}y+8x=36$$

तथा, वक्र के बिन्दु $\left(2,\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ पर अभिलंब का समीकरण है :

$$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\left(\frac{9y}{16x}\right)_{\left(2,\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)\text{पर}}[x-2]$$

अथवा $$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\frac{9}{16}\times\frac{2\sqrt{5}}{3}(x-2)$$

अथवा $$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{8}(x-2)$$

अथवा $$3\times 8(y)-32\sqrt{5}=9\sqrt{5}\,(x-2)$$

$$24y-32\sqrt{5}=9\sqrt{5}\ x-18\sqrt{5}$$

अथवा $$9\sqrt{5}\ x-24y+14\sqrt{5}=0$$

उदाहरण 29.17. वक्र $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है।

हल : वक्र का समीकरण है : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ...(i)

(i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{2x}{9}-\frac{2y}{16}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

or $$\frac{dy}{dx}=\frac{16x}{9y}$$

स्पर्श रेखा का x-अक्ष के समान्तर होने पर $\frac{dy}{dx}=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{16x}{9y}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

(i) में $x = 0$ रखने पर, हमें मिलता है : $y^2 = -16$ अर्थात् $y = \pm 4i$

अत: वक्र पर ऐसे कोई वास्तविक बिन्दु नहीं हैं जहाँ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है।

उदाहरण 29.18. उन सभी रेखाओं, जिनकी प्रवणता -4 है, के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-1}$ पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

हल : $$y = \frac{1}{x-1} \qquad .....(i)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

यह -4 के बराबर दिया है।

$$\therefore \quad \frac{-1}{(x-1)^2} = -4$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

(i) में $x = \frac{1}{2}$ रखने पर हमें मिलता है :

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \quad \text{जब} \quad x = \frac{3}{2}, \quad y = 2$$

$\therefore$ बिन्दु हैं : $\left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, -2\right)$

$\therefore$ स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं :

(a) $$y - 2 = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ $y - 2 = -4x + 6$ अथवा $4x + y = 8$

(b) $$y + 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ $y + 2 = -4x + 2$ अथवा $4x + y = 0$

उदाहरण 29.19. वक्र $y = x^3$ के बिन्दु $(2, 8)$ पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : $y = x^3 \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2\text{ पर}} = 12$$

$\therefore$ अभिलंब की प्रवणता है $= -\frac{1}{12}$

$\therefore$ अभिलंब का समीकरण है :

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2)$$

अथवा $12(y-8)+(x-2)=0$ अथवा $x+12y=98$

देखें आपने कितना सीखा 29.4

1. अंकित बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए :

(i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, $(0, 5)$ पर (ii) $y = x^2, (1, 1)$ पर

(iii) $y = x^3 - 3x + 2$ उन बिन्दुओं पर जहाँ x-निर्देशांक 3 है।

2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

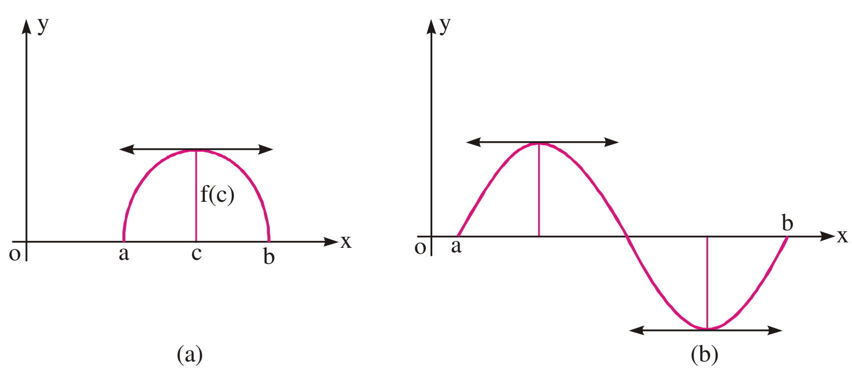
3. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समान्तर है।

5. सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = y^2$ तथा $xy = k$ लंबवत प्रतिच्छेद करते हैं यदि $8k^2 = 1$

29.5 रोले का प्रमेय

आइए, अब हम एक ऐसे महत्वपूर्ण प्रमेय के विषय में पढ़ें जिससे यह पता लगता है कि $y = f(x)$ के आलेख पर दो बिन्दुओं a तथा b, जिसके y-निर्देशांक $f(a)$ तथा $f(b)$ बराबर है, के बीच कम से कम एक बिन्दु c ऐसा अवश्य होगा कि बिन्दु $[c, f(c)]$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो (देखें चित्र 29.2)



चित्र. 29.2

29.5.1 रोले के प्रमेय का गणितीय सूत्रण

माना f एक वास्तविक फलन है जो बंद अन्तराल [a, b] में इस प्रकार परिभाषित है कि

(i) बंद अन्तराल [a, b] में फलन f सतत है

(ii) खुले अन्तराल]a, b[में फलन f अवकलनीय है

(iii) $f(a) = f(b)$,

तो खुले अन्तराल]a, b[में कम से कम एक बिन्दु c ऐसा अवश्य स्थित होगा जहाँ $f'(c) = 0$ हो।

टिप्पणी

(i) कथन कम से कम एक बिन्दु का अर्थ है कि $c \in]a, b]$ में c के एक से अधिक मान भी हो सकते हैं ताकि $f'(c) = 0$ है।

(ii) प्रतिबंध कि f, [a, b] पर सतत है अनिवार्य है तथा इसमें कोई ढील नहीं दी जा सकती।

(iii) प्रतिबंध कि f,]a, b[पर अवकलनीय है भी अनिवार्य है तथा इसमें ढिलाई नहीं दी जा सकती।

उदाहरणार्थ $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ अन्तराल $[-1, 1]$ पर सतत है तथा]–1, 1[पर अवकलनीय है तथा रोले का प्रमेय इसके लिए वैध है।

आइए कुछ उदाहरण लें

उदाहरण 29.20. फलन $f(x) = x(x-1)(x-2), x \in [0, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

हल : $$f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

(i) f (x) एक बहुपद फलन है। अतः [0, 2] में सतत है

(ii) f (x) अन्तराल]0, 2[पर अवकलनीय है

(iii) $f(0) = 0$ तथा $f(2) = 0$

$\therefore$ $$f(0) = f(2)$$

रोले के प्रमेय की सभी शर्तें सन्तुष्ट हो जाती हैं

साथ ही, $$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$\therefore f'(c) = 0$ से, $3c^2 - 6c + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6}$

$$\Rightarrow \quad c = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

हम देखते हैं कि c के दोनों मान अंतराल]0, 2[में हैं।

उदाहरण 29.21. फलन $f(x) = \sin x - \sin 2x$, $x \in [0, \pi]$ के लिए रोले के प्रमेय की अनुप्रयोज्यता (applicability) की जांच कीजिए।

हल : $$f(x) = \sin x - \sin 2x \qquad ...(i)$$

(i) साइन फलन है जो अन्तराल $[0, \pi]$ में सतत है तथा $[0, \pi]$ में अवकलनीय है ।

साथ ही $f(0)=0$ तथा $f(\pi)=0$

$$\Rightarrow \qquad f(\pi)=f(0)=0$$

$\therefore$ रोले के प्रमेय के सभी प्रतिबंध सन्तुष्ट होते हैं।

अब $$f'(c)=2\left[2\cos^2 c-1\right]-\cos c=0$$

या $$4\cos^2 c-\cos c-2=0$$

$$\therefore \qquad \cos c=\frac{1\pm\sqrt{1+32}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}.$$

चूँकि $\sqrt{33}<6$ है,

$$\therefore \qquad \cos c<\frac{7}{8}=0.875$$

जो यह दर्शाती है कि c, 0 से π के बीच में है।

देखें आपने कितना सीखा 29.5

निम्न फलनों के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए :

(i) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{3}+2x,\ x\in[0,3]$ (ii) $f(x)=x^2-1\ [-1,1]$ पर

(iii) $f(x)=\sin x+\cos x-1,\ \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ पर (iv) $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(x-2\right),\ [-1,2]$ पर

29.6 लागराज का माध्यमान प्रमेय

यह प्रमेय रोले के प्रमेय का सुधरा हुआ रूप है जिसमें यह आवश्यक नहीं कि स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर हो। इस प्रमेय का कथन है कि स्पर्श रेखा वक्र के अन्त बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है। दूसरे शब्दों में यह प्रमेय कहता है कि वक्र के आलेख पर सदा एक बिन्दु का अस्तित्व है जहाँ स्पर्श रेखा वक्र के अन्त बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

29.6.1 लागरांज प्रमेय का गणितीय सूत्रण

माना f एक वास्तविक मूल्य फलन है जो एक बन्द अन्तराल $[a, b]$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि

(a) f अन्तराल $[a, b]$ पर सतत है

(b) f, $]a, b[$ पर अवकलनीय है

(c) $f(b)\neq f(a)$

तो खुले अन्तराल $]a, b[$ में एक बिन्दु इस प्रकार है कि

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

टिप्पणी

जब $f(b)=f(a)$ हो, तो $f'(c)=0$ है। तब यह प्रमेय रोले का प्रमेय बन जाता है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 29.22. फलन $f(x) = (x-3)(x-6)(x-9)$ को अन्तराल [3, 5] के लिए लागरांज के माध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

हल : $$f(x) = (x-3)(x-6)(x-9) = (x-3)(x^2-15x+54)$$

अथवा $$f(x) = x^3 - 18x^2 + 99x - 162 \qquad \text{...(i)}$$

(i) एक बहुपद फलन है इसलिए दिए गए अन्तराल में सतत तथा अवकलनीय है

यहाँ $f(3) = 0,\ f(5) = (2)(-1)(-4) = 8$

$\therefore$ $$f(3) \neq f(5)$$

इसलिए माध्यमान प्रमेय के सभी प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं।

$\therefore$ $$f'(c) = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{8-0}{2} = 4$$

अब $$f'(x) = 3x^2 - 36x + 99$$

$\therefore$ $3c^2 - 36c + 99 = 4$ अथवा $3c^2 - 36c + 95 = 0$

$\therefore$ $$c = \frac{36 \pm \sqrt{1296-1140}}{6} \approx \frac{36 \pm 12.5}{6} = 8.08 \text{ या } 3.9$$

$\therefore$ $$c = 3.9 \in (3, 5)$$

$\therefore$ लागरांज का माध्यमान प्रमेय सत्यापित हुआ।

उदाहरण 29.23. परवलय $y = (x-4)^2$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा बिन्दुओं $(4, 0)$ तथा $(5, 1)$ को मिलाने वाली जीवा के समान्तर है।

हल : वक्र के किसी बिन्दु पर उसकी स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु पर $(f'(x))$ के मान के बराबर होता है

$$f'(x) = 2(x-4)$$

$(4, 0)$ तथा $(5, 1)$ को जोड़ने वाली जीवा की प्रवणता है

$$\frac{1-0}{5-4} = 1 \qquad \left[\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]$$

$\therefore$ माध्यमान प्रमेय के अनुसार

$$2(x-4) = 1 \quad \text{अथवा} \quad (x-4) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $$x = \frac{9}{2}$$

जो 4 तथा 5 के बीच स्थित है

अब $$y = (x-4)^2$$

जब $$x = \frac{9}{2}, y = \left(\frac{9}{2} - 4\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ वांछित बिन्दु $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{4}\right)$ है।

देखें आपने कितना सीखा 29.6

1. निम्न फलनों में से प्रत्येक के लिए माध्यमान प्रमेय की जाँच कीजिए :

(i) $f(x) = 3x^2 - 4$, $[2, 3]$ पर (ii) $f(x) = \log x$, $[1, 2]$ पर

(iii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $[1, 3]$ पर (iv) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$ $[0, 1]$ पर

2. परवलय, $y = (x+3)^2$ पर वह एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा, बिन्दुओं $(3, 0)$ तथा $(-4, 1)$ को मिलाने वाली जीवा के समान्तर है।

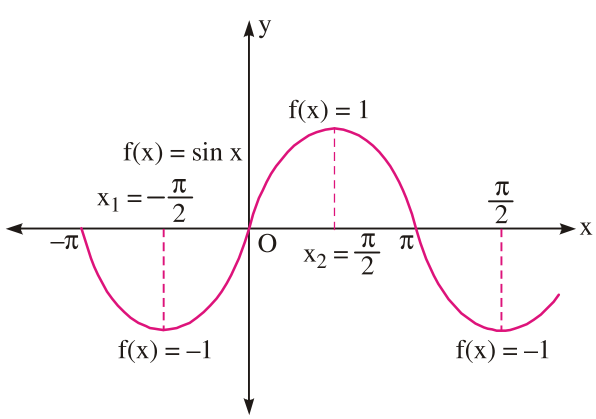
29.7 वर्धमान तथा ह्रासमान फलन

आप एक वर्धमान अथवा ह्रासमान फलन की सामान्य प्रवृतियों (trends) को पहले ही देख चुके हैं। यहाँ हम फलनों के वर्धमान अथवा ह्रासमान होने के प्रतिबधों को ज्ञात करने का प्रयास करेंगे।

मान लीजिए कि एक फलन $f(x)$ एक बन्द अन्तराल $[a,b]$ पर परिभाषित है।

मान लीजिए कि $x_1, x_2 \in [a, b]$ है। तब फलन $f(x)$ दिये गये अन्तराल में वर्धमान फलन कहलाता है, यदि $f(x_2) \geq f(x_1)$ जब भी $x_2 > x_1$ हो। इसे निरन्तर वर्धमान कहा जाता है, जब सभी $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in [a, b]$ के लिए $f(x_2) > f(x_1)$ हो।

चित्र 29.3 में, जब $x, -\frac{\pi}{2}$ से $\frac{\pi}{2}$ तक बढ़ता है, तो $\sin x, -1$ से $+1$ तक बढ़ता है।

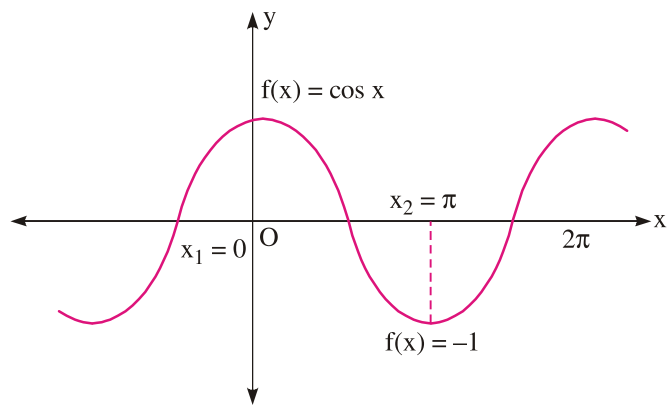


चित्र 29.3

टिप्पणी: एक अन्तराल में एक फलन वर्धमान होगा, यदि $f(x+h) > f(x)$ हो, जब प्रत्येक x अन्तराल में है तथा h धनात्मक है।

एक फलन, जो एक बन्द अन्तराल [a,b] में परिभाषित है, उस अन्तराल में ह्रासमान होगा, यदि $f(x_2) \le f(x_1)$ हो, जब $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in [a,b]$ हो, उसे निरन्तर ह्रासमान कहा जाता है, यदि सभी $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in [a,b]$ के लिए $f(x_1) > f(x_2)$ हो।

चित्र 29.4 में, जब x,0 से π तक बढ़ता है, तो $\cos x$, 1 से –1 तक कम होता है।



चित्र 29.4

टिप्पणी: एक फलन दिये हुए अन्तराल में ह्रासमान होता है, यदि दिये गये अन्तराल में प्रत्येक x के लिए और $h > 0$ के लिए $f(x+h) < f(x)$ हो।

29.8 एकदिष्ट फलन

मान लीजिए कि x_1, x_2 दो बिन्दु ऐसे हैं कि फलन $f(x)$ के परिभाषित अन्तराल में $x_1 < x_2$ है। तब फलन एकदिष्ट कहलाता है, यदि वह या तो वर्धमान हो और या ह्रासमान हो।

फलन $f(x)$ निरन्तर वर्धमान कहलाता है, जब सभी $x_2 > x_1$ के लिए (जो दिये गये अन्तराल में है), $f(x_2) \ge f(x_1)$ हो तथा निरन्तर ह्रासमान कहलाता है, यदि $f(x_1) \ge f(x_2)$

उदाहरण 29.24. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $f(x) = 4x + 7$ एक एकदिष्ट फलन है।

हल : R में x के दो मानों x_1 और x_2 पर विचार कीजिए ताकि $x_2 > x_1$ हो। (1)

(1) के दोनों पक्षों को 4 से गुणा करने पर हमें मिलता है : $4x_2 > 4x_1$ (2)

(2) के दोनों पक्षों में 7 जोड़ने पर, हमें मिलता है :

$$4x_2 + 7 > 4x_1 + 7$$

अर्थात् $$f(x_2) > f(x_1)$$

अत:, हम देखते हैं कि $f(x_2) > f(x_1)$ है, जब भी $x_2 > x_1$ है।

अत:, दिया गया फलन $f(x) = 4x + 7$ एक एकदिष्ट फलन (निरन्तर वर्धमान) है।

उदाहरण 29.25. दर्शाइये कि $f(x) = x^2$

सभी $x < 0$ के लिए एक निरन्तर ह्रासमान फलन है।

हल : x के कोई दो मान x_1, x_2 ऐसे लीजिए कि

$x_2 > x_1$ हो $\qquad x_1, x_2 < 0$ ....(i),

ध्यान दीजिए कि किसी असमिका को एक ऋणात्मक संख्या से गुणा करने पर असमिका उल्ट जाती है।

(i) को x_2 से गुणा करने पर, हमें मिलता है :

$$x_2 \cdot x_2 < x_1 \cdot x_2$$

अथवा $\qquad x_2^2 < x_1 x_2$ ......(ii),

(i) को x_1 से गुणा करने पर हमें मिलता है :

$$x_1 \cdot x_2 < x_1 \cdot x_1$$

अथवा $\qquad x_1 x_2 < x_1^2$ .....(iii),

(ii) तथा (iii) से, हमें मिलता है :

$$x_2^2 < x_1 x_2 < x_1^2$$

अथवा $\qquad x_2^2 < x_1^2$

अथवा $\qquad f(x_2) < f(x_1)$ .....(iv)

अतः (i) तथा (iv) से हमें प्राप्त हुआ कि

$x_2 > x_1$ के लिए, $f(x_2) < f(x_1)$ है।

अतः, दिया गया फलन सभी $x < 0$ के लिए, निरन्तर ह्रासमान है।

देखें आपने कितना सीखा 29.7

1. (a) सिद्ध कीजिए कि $x \in R$ के प्रत्येक मान के लिए, फलन $f(x) = 3x + 4$ एक एकदिष्ट वर्धमान फलन है।

   (b) सिद्ध कीजिए कि $x \in R$ के प्रत्येक मान के लिए फलन $f(x) = 7 - 2x$ एक एकदिष्ट ह्रासमान फलन है।

   (c) सिद्ध कीजिए कि x के सभी वास्तविक मानों के लिए, फलन $f(x) = ax + b$ निरन्तर वर्धमान फलन है, जबकि a, b अचर है तथा $a > b$ है।

2. (a) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$ सभी वास्तविक $x > 0$ के लिए एक दिष्ट वर्धमान फलन है।

   (b) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2 - 4$, $x > 2$ के लिए एकदिष्ट वर्धमान है तथा $-2 < x < 2$ के लिए एकदिष्ट ह्रासमान फलन है जब $x \in R$ है।

प्रमेय 1: यदि मुक्त अन्तराल]a,b[में, फलन $f(x)$ वर्धमान हो, तब प्रत्येक $x \in [a,b]$ के लिए उस बिन्दु पर फलन का अवकलज $f'(x)$ धनात्मक होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए कि (x, y) या [x, f (x)] वक्र $y = f(x)$ पर एक बिन्दु है।

एक धनात्मक δx के लिए हम लिख सकते हैं : $x + \delta x > x$

अब फलन $f(x)$ एक वर्धमान फलन है।

$\therefore$ $$f(x+\delta x) > f(x)$$

या $$f(x+\delta x) - f(x) > 0$$

या $$\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} > 0 \quad [\because \delta x > 0]$$

माना δx एक अति छोटी संख्या है। सीमा लेने पर, जब $\delta x \to 0$ है, हमें मिलता है :

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} > 0$$

या $$f'(x) > 0$$

अतः, यदि $y = f(x)$ एक बिन्दु पर एक वर्धमान फलन है, तो $f'(x)$ उस बिन्दु पर धनात्मक होगा।

प्रमेय 2: एक मुक्त अन्तराल]a, b[में, यदि फलन $f(x)$ ह्रासमान है, तो प्रत्येक $x \in [a,b]$ के लिए उस बिन्दु पर फलन का अवकलज $f'(x)$ ऋणात्मक होगा।

उपपति : मान लीजिए कि वक्र $y = f(x)$ पर (x, y) या $[x, f(x)]$ कोई बिन्दु है।

एक धनात्मक δx के लिए, हमें मिलता है : $x + \delta x > x$

चूँकि फलन ह्रासमान है, इसलिए $f(x+\delta x) < f(x)$ $\qquad (\delta x > 0)$

या $$f(x+\delta x) - f(x) < 0$$

δx से भाग देने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} < 0,\ \delta x > 0$$

$\therefore$ $$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} < 0$$

अर्थात् $f'(x) < 0$

इस प्रकार, यदि $y = f(x)$ एक बिन्दु पर ह्रासमान फलन है, तो उस बिन्दु पर $f'(x)$ ऋणात्मक होगा।

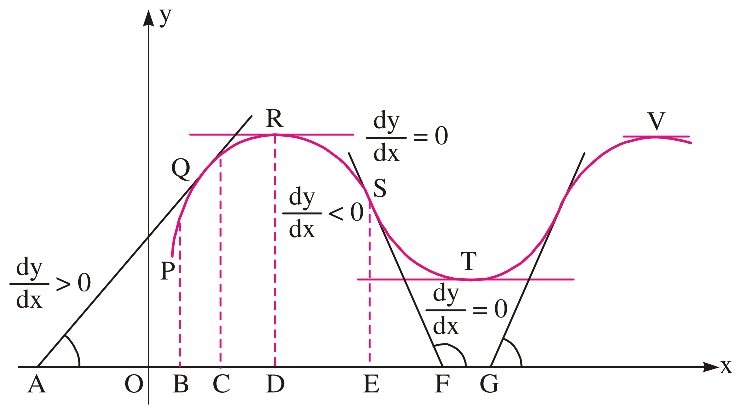
टिप्पणी: यदि एक बंद अन्तराल $[a, b]$ में, $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है, तो $f(x)$

(1) [a,b] पर वर्धमान है, यदि खुले (मुक्त) अन्तराल]a,b[में $f'(x) > 0$ है।

(ii) [a,b] पर ह्रासमान है, यदि खुले (मुक्त) अन्तराल]a,b[में $f'(x) < 0$ है।

29.9 किसी फलन की एकदिष्टता तथा अवकलज के चिन्ह में सम्बन्ध

चित्र 29.5 में दिखाए गये वक्र के फलन पर विचार कीजिए।



चित्र 29.5

किसी फलन की वर्धमान या ह्रासमान प्रकृति (एकदिष्टता) तथा अवकलज के चिन्ह में सम्बन्ध के अध्ययन को हम वक्र के चित्र 29.5 की भांति विभिन्न भागों (i) P से R तक, (ii) R से T तक, (iii) T से V तक विभाजित कर लेते हैं।

(i) हम देखते हैं कि P से R तक वक्र के प्रत्येक अनुवर्ती बिन्दु के लिए, कोटि (y-निर्देशांक) बढ़ती जाती है और उसका x-निर्देशांक भी बढ़ता है।

यदि (x_1, y_1) का अनुवर्ती बिन्दु (x_2, y_2) है, तब $x_2 > x_1$ से $y_2 > y_1$ या $f(x_2) > f(x_1)$ मिलता है। साथ ही P से R तक प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा धनात्मक x-अक्ष के साथ न्यून कोण बनाती है, और इसी लिए वक्र के ऐसे सभी बिन्दुओं (R के अतिरिक्त) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता धनात्मक होगी। बिन्दु R पर, जहाँ कोटि (y-निर्देशांक) का मान अधिकतम है, स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, और उसके परिणामस्वरूप R पर स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य है। वक्र के इस भाग के लिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

(a) फलन P से R तक निरन्तर वर्धमान है।

(b) (R के अतिरिक्त) प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ न्यून कोण बनाती है।

(c) वक्र के प्रत्येक बिन्दु, जिस पर y वर्धमान है, पर स्पर्श रेखा की प्रवणता धनात्मक है, अर्थात $\frac{dy}{dx} > 0$ है।

(d) जब y का मान अधिकतम है, अर्थात् बिन्दु R पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx} = 0$ ।

(ii) वक्र के भाग R से T तक के बीच प्रत्येक बिन्दु पर कोटि (y-निर्देशांक) कम होती जाती है, यद्यपि इसका x निर्देशांक बढता जाता है। इस प्रकार $x_2 > x_1$ से हमें $y_2 < y_1$ या $f(x_2) < f(x_1)$ मिलता है।

साथ ही वक्र पर R के अनुवर्ती प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ अधिक कोण बनाती है। इसके परिणामस्वरूप प्रत्येक उन बिन्दुओं के लिए जिनका y-निर्देशांक कम हो रहा है, स्पर्श रेखा की प्रवणता ऋणात्मक है। बिन्दु T पर कोटि का मान न्यूनतम है और

स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है। इसके परिणामस्वरूप T पर स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य है।

उपरोक्त से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि,

(a) R से T तक फलन निरंतर ह्रासमान है।

(b) T के अतिरिक्त प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ अधिक कोण बनाती है।

(c) वक्र के प्रत्येक बिन्दु, जिन पर y-ह्रासमान है, स्पर्श रेखा की प्रवणता ऋणात्मक है, अर्थात् $\frac{dy}{dx}<0$ है।

(d) बिन्दु T पर जहाँ कोटि का मान न्यूनतम है, स्पर्श रेखा की प्रवणता अर्थात $\frac{dy}{dx}=0$ है।

(iii) पुनः वक्र पर T से V तक के प्रत्येक बिन्दु पर y-निर्देशांक निरंतर बढ़ता है। T से V तक वक्र के प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ न्यून कोण बनाती है, जिसके फलनस्वरूप वक्र के इस प्रकार के प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता धनात्मक होती है। निष्कर्ष यह है कि T और V के अतिरिक्त प्रत्येक बिन्दु पर $\frac{dy}{dx}>0$ है।

साथ ही, T और V पर $\frac{dy}{dx}=0$ तथा बिन्दु R,T और V के एक ओर $\frac{dy}{dx}<0$ है और दूसरी ओर $\frac{dy}{dx}>0$ है तथा R,T और V पर $\frac{dy}{dx}=0$ ।

उदाहरण 29.26. x के किन मानों के लिए, फलन $f(x)=x^2-6x+8$ वर्धमान है तथा किनके लिए ह्रासमान है।

हल :
$$f(x)=x^2-6x+8$$
$$f'(x)=2x-6$$

$f(x)$ के वर्धमान फलन होने के लिए, $f'(x)>0$ होगा।

अर्थात् $\quad 2x-6>0 \quad$ अथवा $\quad 2(x-3)>0$

अथवा $\quad x-3>0 \quad$ अथवा $\quad x>3$

अतः x>3 के लिए फलन वर्धमान है।

$f(x)$ के ह्रासमान होने के लिए
$$f'(x)<0$$

अर्थात् $\quad 2x-6<0 \quad$ अथवा $\quad x-3<0$

अथवा $\quad x<3$

अतः, $x<3$ के लिए फलन ह्रासमान है।

उदाहरण 29.27. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$ वर्धमान है अथवा ह्रासमान है।

हल : $\quad f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$= 6\left(x^2 - x - 2\right) = 6(x-2)(x+1)$$

$f(x)$ के वर्धमान होने के लिए,

$$f'(x) > 0$$

अर्थात् $6(x-2)(x+1) > 0$ अथवा $(x-2)(x+1) > 0$

क्योंकि दो गुणनखंडों का गुणनफल धनात्मक है, इसलिए या तो दोनों धनात्मक है अथवा दोनों ऋणात्मक हैं।

या तो $x-2>0$ तथा $x+1>0$ अथवा $x-2<0$ तथा $x+1<0$

अर्थात् $x>2$ तथा $x>-1$ अथवा $x<2$ तथा $x<-1$

$\Rightarrow$ $x>2$ तथा $x>-1$ अथवा $x<-1$ तथा $x<2$

$x>2$ अथवा $x<-1$

अतः, वर्धमान फलन के लिए $x>2$ अथवा $x<-1$.

अब, $f(x)$ के ह्रासमान होने के लिए, $f'(x)<0$ होगा।

$\Rightarrow$ $6(x-2)(x+1)<0$ अथवा $(x-2)(x+1)<0$

दो गुणनखंड़ों का गुणनफल ऋणात्मक है। इसलिए एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक होगा।

या तो $x-2>0$ तथा $x+1<0$ अथवा $x-2<0$ तथा $x+1>0$

$\Rightarrow$ $x>2$ तथा $x<-1$ $\Rightarrow$ $x<2$ तथा $x>-1$

ऐसा कोई x सम्भव नहीं है इससे मिलता है $-1<x<2$

$\therefore$ फलन $-1<x<2$ में ह्रासमान है।

उदाहरण 29.28. फलन $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ के लिए वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन वर्धमान अथवा ह्रासमान है ।

हल :

$$f'(x) = \frac{\left(x^2+1\right)\frac{dx}{dx} - x \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right) - x\cdot(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\therefore \quad f'x = \frac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

क्योंकि $\left(x^2+1\right)^2$ सभी x के लिए धनात्मक है। इसलिए यदि $-1<x<0$ है तो $(1-x)$ तथा $(1+x)$ दोनों धनात्मक हैं जिससे $f'(x)>0$ है।

यदि $0<x<1$ है तो, $(1-x)$ तथा $(1+x)$ दोनों धनात्मक होंगे जिससे $f'(x)>0$ होगा।

यदि $x<-1$ है तो, $(1-x)$ धनात्मक तथा $(1+x)$ ऋणात्मक होगा जिससे $f'(x)<0$ होगा।

यदि $x>1$ है तो, $(1-x)$ ऋणात्मक तथा $(1+x)$ धनात्मक होगा जिससे $f'(x)<0$ होगा।

अत:, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$-1<x<0$ तथा $0<x<1$ के लिए

अथवा $-1<x<1$ के लिए फलन वर्धमान है

तथा $x<-1$ अथवा $x>1$ के लिए फलन ह्रासमान है।

टिप्पणी: वे बिन्दु जहाँ $f'(x)=0$ है क्रांतिक बिन्दु (critical points) कहलाते हैं। यहाँ क्रांतिक बिन्दु $x=-1, x=1$ हैं।

उदाहरण 29.29. दर्शाइए कि :

(a) $f(x)=\cos x$ अन्तराल $0\le x\le \pi$ में ह्रासमान फलन है।

(b) $f(x)=x-\cos x$ सभी x के लिए वर्धमान फलन है।

हल : (a) $f(x)=\cos x$

$f'(x)=-\sin x$

$f(x)$ ह्रासमान है, यदि $f'(x)<0$ है।

अथवा $-\sin x<0$

अर्थात $\sin x>0$

$\sin x$ प्रथम तथा द्वितीय चर्तुर्थांशों में धनात्मक होता है।

$\therefore$ $\sin x$; $0\le x\le \pi$ में धनात्मक है।

$\therefore$ $f(x)$; $0\le x\le \pi$ में ह्रासमान है।

(b) $f(x)=x-\cos x$

$f'(x)=1+\sin x$

$\sin x$ का न्यूनतम मान -1 है तथा अधिकतम मान 1 है।

$\Rightarrow$ $-1\le \sin x\le 1$ अथवा $1-1\le 1+\sin x\le 1+1$

अथवा $0\le 1+\sin x\le 2$

अथवा $0\le f'(x)\le 2$

$\Rightarrow$ $f'(x)\ge 0$

$\Rightarrow$ $f(x)=x-\cos x$, x के सभी मानों के लिए वर्धमान है।

देखें आपने कितना सीखा 29.8

वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें निम्नलिखित फलन वर्धमान अथवा ह्रासमान हैं :

1. (a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ (b) $f(x) = 3x^2 - 15x + 10$

2. (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ (b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 12$

3. (a) $y = -3x^2 - 12x + 8$ (b) $f(x) = 1 - 12x - 9x^2 - 2x^3$

4. (a) $y = \frac{x-2}{x+1}, x \neq -1$ (b) $y = \frac{x^2}{x-1}, x \neq 1$ (c) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x \neq 0$

5. (a) सिद्ध कीजिए कि फलन $\log \sin x$ अन्तराल $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ में ह्रासमान है

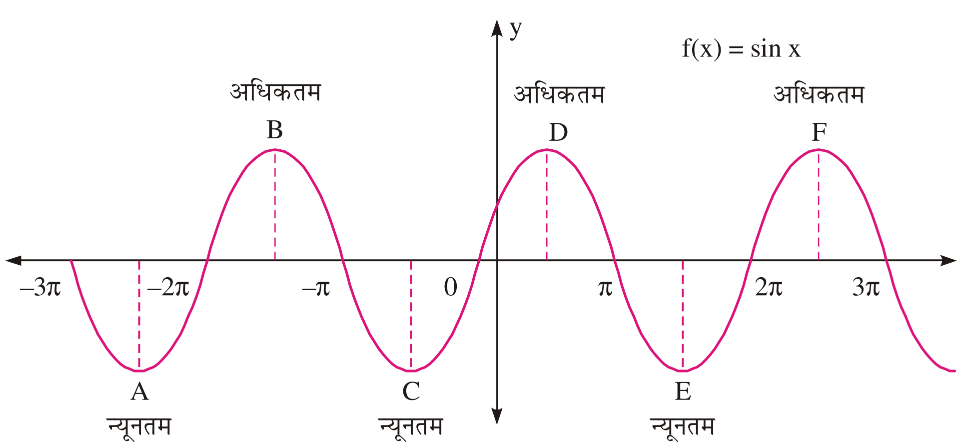
   (b) सिद्ध कीजिए कि फलन $\cos x$ अन्तराल $[\pi, 2\pi]$ में वर्धमान है।

   (c) वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), 0 \leq x \leq \pi$ ह्रासमान अथवा वर्धमान है।

फलन के आलेख से वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समान्तर हैं।

29.10 एक फलन के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान

हमने एक सतत फलन का आलेख देखा है। यह एकान्तरत: बढ़ता तथा घटता है। यदि किसी सतत फलन का मान एक विशेष बिन्दु तक बढ़े और फिर कम होना आरम्भ हो जाए, तो वह फलन का उच्चिष्ठ बिन्दु कहलाता है तथा उस बिन्दु पर उसका संगत मान उस फलन का अधिकतम (उच्चिष्ठ) मान कहलाता है। साथ ही, ऐसी अवस्था आती है जब वह फिर घटने से बढ़ना आरम्भ करता है। यदि किसी सतत फलन का मान किसी विशेष बिन्दु तक कम होता जाये और फिर बढ़ना आरम्भ हो जाए, तो वह बिन्दु फलन का निम्निष्ठ बिन्दु कहलाता है तथा उस बिन्दु पर संगत मान फलन का न्यूनतम (निम्निष्ठ) मान कहलाता है।



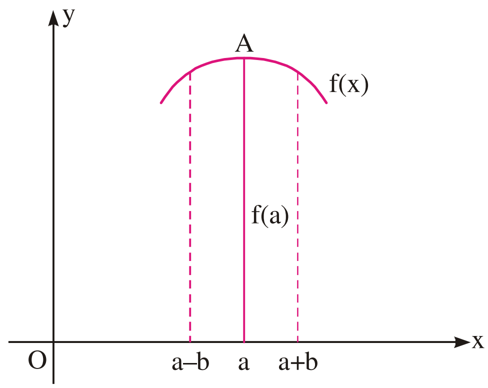
चित्र 29.6

चित्र 29.6 दर्शाता है कि एक फलन के एक से अधिक उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान हो सकते हैं। अत: सतत फलन के लिए, हमें उच्चिष्ठ (निम्निष्ठ) मान एक अन्तराल में मिलते हैं तथा ये मान उस फलन

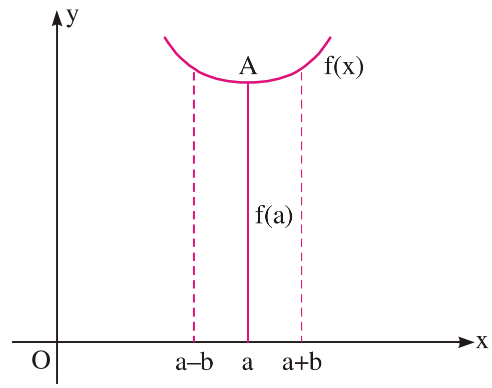
के निरपेक्ष उच्चिष्ठ (निम्निष्ठ)मान नहीं होते। इसी कारण से हम कभी-कभी उन्हें स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा स्थानीय निम्निष्ठ मान कहते हैं।

एक फलन $f(x)$ का बिन्दु $x = a$ पर उच्चिष्ठ (अथवा स्थानीय उच्चिष्ठ) मान तब होता है जब b के पर्याप्त काफी छोटे धनात्मक मानों के लिए, $f(a) \geq f(a \pm b)$ हो, जहाँ $a - b < a < a + b$ है। (देखिए चित्र 29.7)।

एक फलन का उच्चिष्ठ (अथवा स्थानीय उच्चिष्ठ) मान वह है जो निर्दिष्ट बिन्दु के दोनों ओर तुरन्त आसन्न प्रतिवेशी बिन्दुओं पर फलन के सभी मानों में सबसे अधिक हो।



चित्र 29.7



चित्र 29.8

एक फलन $f(x)$ का एक बिन्दु $x = a$ पर निम्निष्ठ (अथवा स्थानीय निम्निष्ठ) मान तब होता है जब b के सभी पर्याप्त काफी छोटे धनात्मक मानों के लिए $f(a) \geq f(a \pm b)$ हों, जहाँ $a - b < a < a + b$ है।

चित्र 29.8 में, फलन $f(x)$ का $x = a$ पर स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

एक फलन का निम्निष्ठ (अथवा स्थानीय निम्निष्ठ) मान वह है जो निर्दिष्ट बिन्दु के दोनों ओर, तुरन्त आसन्न प्रतिवेशी बिन्दुओं, पर फलन के सभी मानों में सबसे कम हो।

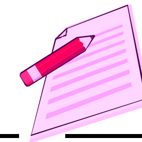
टिप्पणी: बिन्दु $x \in R$ का प्रतिवेश खुले अन्तराल $]x - \in[$ से परिभाषित होता है, जहाँ $\in > 0$ है।

29.11 उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के लिए प्रतिबंध

हम जानते हैं कि जब फलन वर्धमान है, तो उसका अवकलज धनात्मक होता है तथा जब फलन ह्रासमान है, तो अवकलज ऋणात्मक होता है। हम इस परिणाम का प्रयोग कर किसी फलन का उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ होने के लिए प्रतिबंध ज्ञात करेंगे। चित्र 29.6 को देखिए। बिन्दु B,D तथा F उच्चिष्ठ के बिन्दु है तथा बिन्दु A,C,E निम्निष्ठ के बिन्दु हैं।

B के बाईं ओर, फलन वर्धमान है। अत: $f'(x) > 0$ है। लेकिन B की दायीं ओर फलन ह्रासमान है। अत: $f'(x) < 0$ यह तभी संभव है, जब $f'(x)$ बीच में कहीं शून्य हो जाए। हम इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

> एक फलन $f(x)$ का एक बिन्दु पर उच्चिष्ठ मान है, यदि (i) $f'(x) = 0$ तथा (ii) $f'(x)$ उस बिन्दु पर जहाँ $f'(x) = 0$ के प्रतिवेश (neighbourhood) में धनात्मक से ऋणात्मक होता है (जब बिन्दु बायें से दायीं ओर लिए जाते हैं)



अब, बिन्दु C के बायीं ओर (चित्र 29.6) फलन $f(x)$ ह्रासमान है। इसलिए $f'(x) < 0$ है तथा C के दायीं ओर फलन वर्धमान है और इसीलिए $f'(x) > 0$ है। एक बार फिर, धनात्मक मान होने से पहले $f'(x) = 0$ होगा। हम इसे निम्न प्रकार से लिखते हैं :

एक फलन $f(x)$ का एक बिन्दु पर निम्निष्ठ मान है, यदि (i) $f'(x) = 0$ तथा (ii) $f'(x)$ उस बिन्दु, जहाँ $f'(x) = 0$ है, के प्रतिवेश में ऋणात्मक से धनात्मक होता है।

हमें यह ध्यान रखना चाहिए कि उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए $f'(x) = 0$

एक आवश्यक प्रतिबंध है, परन्तु पर्याप्त नहीं। हम ऐसा एक फलन ज्ञात कर सकते है जो वर्धमान है, फिर अचर तथा फिर वर्धमान है। इस स्थिति में, $f'(x)$ अपना चिन्ह नहीं बदलता । अत: वह मान जहाँ $f'(x) = 0$ है उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ बिंन्दु नहीं है। ऐसे बिन्दु को नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Inflexion) कहते हैं।

उदाहरणतया, फलन $f(x) = x^3$ के लिए, $x = 0$ एक नति परिवर्तन बिन्दु है क्योंकि जब x, 0 से होकर जाता है, तो $f'(x) = 3x^2$ अपना चिन्ह नहीं बदलता। क्योंकि $f'(x)$ बिन्दु 0 के दोनों ओर ध नात्मक है, क्योंकि स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के साथ न्यून कोण बनाती हैं (देखिए चित्र 29.9)। अत: $f(x) = x^3$ का $x = 0$ पर एक नति परिवर्तन बिन्दु है।

वे बिन्दु, जहाँ $f'(x) = 0$ हो स्तब्ध बिन्दु (stationary points) कहलाते हैं, क्योंकि वहाँ फलन की परिवर्तन दर शून्य है। अत:, उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ बिन्दु स्तब्ध बिन्दु हैं।

टिप्पणी:

स्तब्ध बिन्दु, जहाँ फलन स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा स्थानीय निम्निष्ठ मान पाता है, चरम मान भी कहलाते हैं तथा दोनों स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ मान फलन $f(x)$ के चरम मान भी कहलाते हैं। अत: एक फलन बिन्दु $x = a$ पर चरम मान पाता है, यदि $f(a)$ या तो स्थानीय उच्चिष्ठ हो या स्थानीय निम्निष्ठ हो।

29.12 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने की विधि

किसी फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने की विधि नीचे दी गयी है :

(i) $f'(x)$ ज्ञात कीजिए

(ii) $f'(x) = 0$ मान कर स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कीजिए

(iii) स्तब्ध बिन्दुओं के प्रतिवेश में $f'(x)$ का चिन्ह देखिए। यदि यह धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है, तो उस बिन्दु पर $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान है और यदि $f'(x)$ का चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में बदलता है, तो उस बिन्दु पर $f(x)$ का निम्निष्ठ मान है।

(iv) यदि $f'(x)$ का चिन्ह किसी बिन्दु के सामीप्य में नहीं बदलता तो उसे नति परिवर्तन बिन्दु कहते है।

उदाहरण 29.30. फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ के उच्चिष्ठ (स्थानीय उच्चिष्ठ) तथा निम्निष्ठ (स्थानीय निम्निष्ठ) बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

चरण I : अब $f'(x) = 0$, $3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow$ $(x-3)(x+1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 3, -1$

$\therefore$ स्तब्ध बिन्दु हैं : $x = 3, x = -1$

चरण II : $x = 3$ पर $x < 3$ के लिए $f'(x) < 0$ है

तथा $x > 3$ के लिए $f'(x) > 0$

$\therefore$ $f'(x)$, 3 के प्रतिवेश में अपना चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में बदलता है।

$\therefore$ $x = 3$ पर $f(x)$ का निम्निष्ठ मान है।

चरण III : $x = -1$ पर,

$x < -1$ के लिए $f'(x) > 0$ है।

तथा $x > -1$ के लिए $f'(x) < 0$ है।

$\therefore$ $f'(x), -1$ के प्रतिवेश में अपना चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है। अतः $x = -1$ पर $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान है।

$\therefore$ $x = -1$ और $x = 3$ से हमें क्रमशः उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के बिंदु प्राप्त होते हैं।

अब उच्चिष्ठ मान (निम्निष्ठ मान) ज्ञात करने के लिए हमें प्राप्त है:

फलन का उच्चिष्ठ मान $= f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)$

$= -1 - 3 + 9 = 5$

तथा निम्निष्ठ मान $= f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) = -27$

$\therefore$ स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ के बिंदु क्रमशः $(-1, 5)$ और $(3, -27)$ हैं।

उदाहरण 29.31. फलन $f(x) = x^2 - 4x$ के स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x) = x^2 - 4x$

$\therefore$ $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

$f'(x) = 0$ से हमें मिलता है, $2(x-2) = 0$, अर्थात् $x = 2$ । अब हमें जांच करनी है कि $x = 2$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है या स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है या इनमें से कोई नही है।

आइए $x=1.9$ जो कि 2 के बायीं ओर है तथा $x=2.1$ जो 2 के दायीं ओर है लें, तथा $f'(x)$ का मान इन पर ज्ञात करें।

$$f'(1.9)=2(1.9-2)<0$$
$$f'(2.1)=2(2.1-2)>0$$

जब हम 2 की ओर बांयी ओर से पहुँचते हैं, तो $f'(x)<0$ है तथा जब हम 2 की ओर दांयी ओर से पहुँचते हैं, तो $f'(x)>0$ है। अत: $x=2$ पर एक स्थानीय निम्निष्ठ है।

हम f (x) के चिन्ह के विषय में अपनी खोज को एक तालिका, जो नीचे दी गई है, में दे रहे हैं।

f' (x) का चिन्ह

बिन्दु $x = 2$

2 के बायीं ओर	2 के दायीं ओर
$f'(x)<0$	$f'(x)>0$

स्थानीय निम्निष्ठ

उदाहरण 29.32. फलन $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$ के सभी स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : $$f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$$

$$\therefore \quad f'(x)=6x^2-6x-12=6\left(x^2-x-2\right)$$

$$\therefore \quad f'(x)=6(x+1)(x-2)$$

अब $f'(x)=0$ को x के लिए हल करने पर, हम पाते हैं :

$$6(x+1)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-1, 2$$

अत:, $x=-1,2$ पर $f'(x)=0$

अब हम जाँच करेंगे कि क्या ये बिन्दु स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु हैं या स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु हैं या इनमें से कोई नहीं हैं।

बिन्दु $x=-1$ को लीजिए।

आइए हम $x=-1.1$ लें जो -1 के बायीं ओर है तथा $x=-0.9$ लें जो -1 के दायीं ओर है तथा f' (x) का मान इन बिंदुओं पर ज्ञात करें।

$f'(-1.1)=6(-1.1+1)(-1.1-2)$, जो कि धनात्मक है, अर्थात् $f'(x)>0$ है।

$f'(-0.9)=6(-0.9+1)(-0.9-2)$, जो कि ऋणात्मक है, अर्थात् $f'(x)<0$ है।

अत:, $x=-1$ पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ है।

आइए अब $x=2$ लें।

अब, हम $x = 1.9$ लेते हैं जो $x = 2$ के बायीं ओर है तथा $x = 2.1$ लेते हैं जो $x = 2$ के दायीं ओर है तथा इन बिन्दुओं पर $f'(x)$ के मान ज्ञात करते हैं।

$$f'(1.9) = 6(1.9+1)(1.9-2)$$

$= 6\times$(धनात्मक संख्या)$\times$(ऋणात्मक संख्या) = एक ऋणात्मक संख्या

अर्थात् $f'(1.9) < 0$ है।

साथ ही $f'(2.1) = 6(2.1+1)(2.1-2)$, जो कि धनात्मक है।

अर्थात् $f'(2.1) > 0$ है।

$f'(x) = 0$

$f'(x) < 0 \longrightarrow \quad \longleftarrow f'(x) > 0$

$x = 2$

चूँकि $f'(x) < 0$ है जब हम 2 की ओर बाएँ से जाते हैं

तथा $f'(x) > 0$ है जब हम 2 की ओर दाँये से जाते हैं

$\therefore$ $x = 2$ एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है

अतः, $f(x)$ का $x = -1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है तथा $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान $= 2-3+12+8 = 15$ है। $f(x)$ का $x = 2$ पर स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है तथा $f(x)$ का निम्निष्ठ मान $= 2(8)-3(4)-12(2)+8 = -12$ है।

$f'(x)$ का चिन्ह

बिन्दु $x = -1$		बिन्दु $x = 2$	
-1 के बायीं ओर	-1 के दायीं ओर	2 के बायीं ओर	2 के दायीं ओर
धनात्मक	ऋणात्मक	ऋणात्मक	धनात्मक
स्थानीय उच्चिष्ठ		स्थानीय निम्निष्ठ	

उदाहरण 29.33. निम्नलिखत फलन का स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ, यदि कोई है, ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

हल : $$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

तब $$f'(x) = \frac{(1+x^2)1-(2x)x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु अथवा स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात करने के लिए $f'(x) = 0$ रखिए।

अर्थात्, $$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

$\Rightarrow \qquad 1-x^2=0$

अर्थात् $\qquad (1+x)(1-x)=0 \qquad$ अर्थात् $\qquad x = 1, -1$ है।

मान $x = 1$ लीजिए।

x के 1 से थोड़े छोटे मान लेने पर तथा 1 से थोड़े बड़े मान लेने पर, $f'(x)$ का मान धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है। अत: $x = 1$ पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है तथा यहाँ स्थानीय उच्चिष्ठ मान ।

$$=\frac{1}{1+(1)^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

अब मान $x=-1$ लीजिए।

$f'(x)$ अपना चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में बदलता है, जब $x, -1$ से होकर जाता है। अत: $x=-1$ पर फलन का एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है, इस प्रकार स्थानीय निम्निष्ठ मान $=-\frac{1}{2}$

उदाहरण 29.34. फलन $f(x)=\sin x+\cos x, 0<x<\frac{\pi}{2}$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ, यदि कोई है, ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया है : $\qquad f(x)=\sin x+\cos x$

$\therefore \qquad f'(x)=\cos x-\sin x$

स्थानीय उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए, $f'(x) = 0$ होगा।

$\therefore \qquad \cos x-\sin x=0$

अर्थात् $\qquad \tan x=1 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{\pi}{4}, \; 0<x<\frac{\pi}{2}$ में

$x=\frac{\pi}{4}$ पर,

$x<\frac{\pi}{4}$ के लिए $\cos x>\sin x$

$\therefore \qquad f'(x)=\cos x-\sin x>0$

$x>\frac{\pi}{4}$ के लिए $\cos x-\sin x<0$

$\therefore \qquad f'(x)=\cos x-\sin x<0$

अत: $\frac{\pi}{4}$ के प्रतिवेश में $f'(x)$ अपना चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है ।

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ एक स्थानीय उच्चिष्ठ का बिन्दु है।

उच्चिष्ठ मान $\quad =f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

अत:, स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ है।

देखें आपने कितना सीखा 29.9

निम्नलिखित फलनों के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु तथा स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए। उन बिन्दुओं पर उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ भी ज्ञात कीजिए

1. $x^2-8x+12$
2. $x^3-6x^2+9x+15$
3. $2x^3-21x^2+36x-20$
4. $x^4-62x^2+120x+9$
5. $(x-1)(x-2)^2$
6. $\dfrac{x-1}{x^2+x+2}$

29.13 फलन का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए द्वितीय अवकलज का उपयोग

अब हम उस फलन, जिसके द्वितीय अवकलज का अस्तित्व है, के लिए, स्थानीय उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात करने की एक दूसरी विधि बतायेंगे। इसके विभिन्न चरण इस प्रकार हैं :

(i) मान लीजिए कि दिया गया फलन $f(x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(ii) $f'(x)$ ज्ञात कीजिए तथा उसे शून्य के बराबर रखिए।

(iii) $f'(x)=0$ को हल कीजिए। मान लीजिए कि इसका एक वास्तविक मूल $x=a$ है।

(iv) इसका द्वितीय अवकलज $f''(x)$ ज्ञात कीजिए। चरण (iii) में प्राप्त x के प्रत्येक मान a के लिए $f''(a)$ का मान ज्ञात कीजिए।

तब यदि $f''(a)<0$ है, तो $x=a$ एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है,

$f''(a)>0$ है, तो $x=a$ एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है,

$f''(a)=0$ है, तो हम 'a' के बायीं ओर तथा दायीं ओर के बिन्दुओं पर $f'(x)$ के चिन्ह का उपयोग करते हैं तथा परिणाम पर पहुँचते हैं।

उदाहरण 29.35. फलन $2x^3-21x^2+36x-20$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए ।

हल : मान लीजिए कि $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$ है।

तब, $f'(x)=6x^2-42x+36$

$$=6\left(x^2-7x+6\right)=6(x-1)(x-6)$$

स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के लिए,

$$f'(x)=0$$

अथवा $6(x-1)(x-6)=0 \quad\Rightarrow\quad x=1, 6$

अब, $f''(x)=\dfrac{d}{dx}f'(x)$

$$= \frac{d}{dx}\left[6\left(x^2 - 7x + 6\right)\right]$$

$$= 12x - 42$$

$$= 6(2x - 7)$$

$x = 1$ के लिए, $f''(1) = 6(2.1 - 7) = -30 < 0$

अतः $x = 1$ एक स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है। इस पर फलन का मान

$f(1) = 2(1)^3 - 21(1)^2 + 36(1) - 20 = -3$ है। अतः स्थानीय उच्चिष्ठ मान -3 है।

$x = 6$ के लिए,

$$f''(6) = 6(2.6 - 7) = 30 > 0$$

अतः $x = 6$ एक स्थानीय निम्निष्ठ बिन्दु है।

तथा $f(6) = 2(6)^3 - 21(6)^2 + 36(6) - 20 = -128$ है, जो फलन का स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

उदाहरण 25.36. (a) अन्तराल $[-3, -1]$ में फलन $2x^3 - 24x + 107$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए

(b) उपरोक्त फलन का अन्तराल $[1, 3]$ में निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हल: (a) माना $\quad f(x) = 2x^3 - 24x + 107$

$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 24$

स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के लिए

$$f'(x) = 0$$

अर्थात $\quad 6x^2 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2, 2$

केवल (-2) अन्तराल $(-3, -1)$ में है। अतः हम फलन का उच्चिष्ठ केवल $x = -2$ पर ज्ञात करेंगे।

अब $\quad f''(x) = 12x$

$\therefore \quad f''(-2) = -24 < 0$

जो बताता है कि $x = -2$ पर फलन का उच्चिष्ठ मान है

$\therefore$ वांछित उच्चिष्ठ मान $= 2(-2)^3 - 24(-2) + 107$

$$= 139$$

(b) $\quad f''(x) = 12x$

$\therefore \quad f''(2) = 24 > 0, \quad$ [$\because$ केवल 2 अन्तराल $[1, 3]$ में हैं]

जो बताता है कि फलन $f(x)$ का निम्निष्ठ मान $x = 2$ पर है

$\therefore$ वांछित निम्निष्ठ मान $= 2(2)^3 - 24(2) + 107$

$$= 75$$

उदाहरण 29.37. फलन $f(x) = \cos 4x; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ यदि कोई है, ज्ञात कीजिए ।

हल : $$f(x) = \cos 4x$$

$\therefore$ $$f'(x) = -4\sin 4x$$

अब $$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\sin 4x = 0$$

अथवा $\sin 4x = 0$ अथवा $4x = 0, \pi, 2\pi$

अथवा $$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$

क्योंकि $0 < x < \frac{\pi}{2}$, अतः केवल एक ही मान $\frac{\pi}{4}$ संभव है।

अब $$f''(x) = -16\cos 4x$$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर, $$f''(x) = -16\cos\pi = -16(-1) = 16 > 0$$

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{4}$ पर, $f(x)$ निम्निष्ठ है

न्यूनतम मान $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi = -1$$

उदाहरण 29.38. फलन $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$ के अन्तराल $[0, \pi]$ में उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हल : हमें दिया गया है $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

$$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x)$$

$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$$

स्तब्ध बिन्दुओं के लिए, $$f'(x) = 0$$

$\therefore$ $$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$\therefore$ $$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1, \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $$x = \pi, \frac{\pi}{3}$$

अब, $$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

तथा $$f(\pi) = 0$$

$\therefore$ f (x) का बिन्दु $x = \frac{\pi}{3}$ पर उच्चिष्ठ मान $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ है तथा बिन्दुओं $x = 0$ तथा $x = \pi$. पर निम्निष्ठ मान 0 है

देखें आपने कितना सीखा 29.10

द्वितीय अवकलज के उपयोग से निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

1. $2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$
2. $-x^3 + 12x^2 - 5$
3. $(x-1)(x+2)^2$
4. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$
5. $\sin x(1+\cos x), 0 < x < \frac{\pi}{2}$
6. $\sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$
7. $\sin 2x - x, \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

29.14 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ का व्यावहारिक समस्याओं में अनुप्रयोग

फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात करने की समस्याओं के हल करने में अवकलज का उपयोग एक शक्तिशाली हथियार है। इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए हम निम्नलिखित चरणों का उपयोग करते हैं।

(i) आंकड़ों में दिये गये चरांकों के रूप में फलन को बनाएँ।

(ii) दी गई शर्तो की सहायता से फलन को एक ही चर में व्यक्त कीजिए।

(iii) पहले किये गये प्रश्नों की भांति उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ की शर्तें लगायें।

उदाहरण 29.39. वह दो धनात्मक वास्तविक संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका योग 70 तथा गुणनफल अधिकतम है

हल : माना एक संख्या x है। क्योंकि उनका योग 70 है, इसलिए दूसरी संख्या 70–x है।

मान लीजिए उनका गुणनफल f(x) है।

$$\therefore \quad f(x) = x(70 - x) = 70x - x^2$$

हमें f(x) को अधिकतम बनाना है।

अतः हम f '(x) ज्ञात कर उसे शून्य के बराबर रखेंगे

$$f'(x) = 70 - 2x$$

अधिकतम गुणनफल के लिए, $f'(x) = 0$

अथवा $70 - 2x = 0$ अथवा $x = 35$

अब $f''(x) = -2$ जो ऋणात्मक है। अतः f(x) का मान अधिकतम है जब $x = 35$

दूसरी संख्या है $70 - x = 70 - 35 = 35$

अतः वांछित संख्याएं 35, 35 हैं।

उदाहरण 29.40. दर्शाइए कि दिये गए क्षेत्रफल के आयतों में से वर्ग का परिमाप न्यूनतम होता है।

हल : माना आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः x तथा y हैं।

उसका क्षेत्रफल $= xy$

क्योंकि उसका क्षेत्रफल A दिया है, अतः $A = xy$

अर्थात, $$y = \frac{A}{x} \qquad \text{... (i)}$$

अब, आयत का परिमाप $P = 2(x + y)$

अर्थात $$P = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

$$\therefore \qquad \frac{dP}{dx} = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) \qquad \text{...(ii)}$$

न्यूनतम P के लिए, $$\frac{dP}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad A = x^2 \qquad \text{अथवा} \qquad \sqrt{A} = x$$

अब, $$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{4A}{x^3}, \text{ जो धनात्मक है}$$

अतः परिमाप न्यूनतम है जब $\sqrt{A} = x$, $y = \frac{A}{x} = \frac{x^2}{x} = x \qquad (\because A = x^2)$

अतः परिमाप न्यूनतम होगा जब आयत वर्ग होगा।

उदाहरण 29.41. वर्गाकार आधार वाला एक खुला बक्सा दिये गये a^2 क्षेत्रफल वाली शीट से बनाया जाना है। दर्शाइए कि बक्से का अधिकतम आयतन $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ है।

हल : माना वर्गाकार आधार की भुजा x है तथा उसकी ऊँचाई y है

अतः बक्से का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= x^2 + 4xy$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + 4xy = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{a^2 - x^2}{4x}$$

बक्से का आयतन $V = x^2 y = x^2\left(\frac{a^2 - x^2}{4x}\right)$

अथवा $$V = \frac{1}{4}\left(a^2 x - x^3\right) \qquad \text{...(i)}$$

$$\therefore \qquad \frac{dV}{dx} = \frac{1}{4}\left(a^2 - 3x^2\right)$$

उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए, $\dfrac{dV}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}\left(a^2 - 3x^2\right) = 0$$

या $$x^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad \text{...(ii)}$$

(i) तथा (ii) से हमें मिलता है,

$$\text{आयतन} = \frac{1}{4}\left(\frac{\left(a^3\right)}{\sqrt{3}} - \frac{a^3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{a^3}{6\sqrt{3}} \qquad \text{..(iii)}$$

फिर $$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{4}\left(a^2 - 3x^2\right) = -\frac{3}{2}x$$

क्योंकि x बक्से की भुजा है, अतः धनात्मक है

$$\therefore \quad \frac{d^2V}{dx^2} < 0$$

$\therefore$ आयतन अधिकतम है।

अतः बक्से का अधिकतम आयतन $= \dfrac{a^3}{6\sqrt{3}}$

उदाहरण 29.42. दर्शाइए कि एक वृत्त के अर्न्तगत जितने भी आयत बनाये जा सकते हैं, उनमें वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

हल : माना ABCD एक आयत है जो एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, के अर्न्तगत बनाया गया है, तो व्यास

$$AC = 2r$$

तब $$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \text{अथवा} \quad x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2 \qquad \text{......(i)}$$

अब आयत का क्षेत्रफल $A = xy$

$$\therefore \quad A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dx} = \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} + \sqrt{4r^2 - x^2} \cdot 1 = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

अधिकतम क्षेत्रफल के लिए, $\dfrac{dA}{dx} = 0$

$$\frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}r$$

अब $$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2}\,(-4x) - \left(4r^2 - 2x^2\right)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}}}{\left(4r^2 - x^2\right)}$$

$$= \frac{-4x\left(4r^2 - x^2\right) + x\left(4r^2 - 2x^2\right)}{\left(4r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)_{at\ x=\sqrt{2}r} = \frac{-4\sqrt{2}\left(2r^2\right) + 0}{\left(2r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{... (Putting } x = \sqrt{2}r\text{)}$$

$$= \frac{-8\sqrt{2}r^3}{2\sqrt{2}r^3} = -4 < 0$$

अतः A अधिकतम है जब $x = \sqrt{2}r$

अब (i) से, $y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2}\ r$

$\therefore$ $x = y$

अतः ABCD एक वर्ग होगा।

उदाहरण 29.43. दर्शाइए कि एक दिये गये आयतन वाले बन्द लम्ब वृतीय बेलन, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम है, की ऊँचाई उसके व्यास के बराबर है।

हल : माना बेलन का आयतन V, त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है

$\therefore$ $V = \pi r^2 h$

$\Rightarrow$ $$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \text{... (i)}$$

अब पृष्ठीय क्षेत्रफल $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$$= 2\pi r.\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

अब $$\frac{dS}{dr} = \frac{-2V}{r^2} + 4\pi r$$

न्यूनतम पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए, $\frac{dS}{dr} = 0$

$\therefore$ $$\frac{-2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$

$\Rightarrow$ $V = 2\pi r^3$

(i) तथा (ii) से, $$h = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$$ ..(ii)

पुनः $$\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{4V}{r^3} + 4\pi = 8\pi + 4\pi \qquad \text{... [(ii) का उपयोग करने पर]}$$
$$= 12\pi > 0$$

$\therefore$ S न्यूनतम है जब $h = 2r$

उदाहरण 29.44. दर्शाइए कि बंद लम्ब वृत्तीय बेलन, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल दिया गया है, का आयतन अधिकतम होगा यदि उसकी ऊँचाई उसके व्यास के बराबर हो।

हल : मान लीजिए कि S तथा V बंद उस लम्ब वृत्तीय बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन हैं जिसके आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है।

तो $$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$ .....(i)

(यहाँ पृष्ठीय क्षेत्रफल अचर है तथा दिया गया है)

$$V = \pi r^2 h$$

$\therefore$ $$V = \pi r^2 \left[\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}\right] = \frac{r}{2}\left[S - 2\pi r^2\right]$$

$$V = \frac{Sr}{2} - \pi r^3$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - \pi\left(3r^2\right)$$

उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dV}{dr} = 0$

अर्थात, $$\frac{S}{2} - \pi\left(3r^2\right) = 0$$

अथवा, $$S = 6\pi r^2$$

(i) से हमें मिलता है, $$6\pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$\Rightarrow$ $$4\pi r^2 = 2\pi rh$$

$\Rightarrow$ $$2r = h$$ ...(ii)

तथा, $$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left[\frac{S}{2} - 3\pi r^2\right] = -6\pi r, \qquad \left[\because \frac{d}{dr}\left(\frac{S}{2}\right) = 0\right]$$

= एक ऋणात्मक संख्या

अतः लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन अधिकतम होगा यदि उसकी ऊँचाई उसकी त्रिज्या की दुगुनी हो, अर्थात $h = 2r$

उदाहरण 29.45. 48 सेमी भुजा वाली वर्गाकार धातु की चादर के कोनों में से बराबर वर्गाकार टुकड़े काटे गए हैं और शेष भुजाओं को इस प्रकार मोड़ा गया है कि एक खुला बक्सा बन जाए। काटे गये वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए ताकि बक्से का आयतन अधिकतम हो।

हल : मान लीजिए कि काटे गए वर्ग की भुजा x सेमी है। अत: बनने वाले बक्से की भुजा 48–2x सेमी तथा ऊँचाई x सेमी होगी

$\because$ $x > 0, 48-2x > 0,$ अर्थात $x < 24$

x का मान 0 और 24 के बीच होगा

अर्थात $0 < x < 24$

अब बक्से का आयतन V

$$=(48-2x)(48-2x)\,x$$

अर्थात $$V=(48-2x)^2\cdot x$$

$\therefore$ $$\frac{dV}{dx}=(48-2x)^2+2(48-2x)(-2)\,x$$

$$=(48-2x)(48-6x)$$

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dV}{dx}=0$

अर्थात $$(48-2x)(48-6x)=0$$

अत: या तो $x=24$ या $x=8$

$\because$ $0<x<24$ अत: $x=8$

अब $$\frac{d^2V}{dx^2}=24x-384$$

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x=8}=192-384=-192<0$$

अत: $x=8$ के लिए आयतन अधिकतम है।

अत: काटे गये वर्ग की भुजा 8 सेमी होगी।

उदाहरण 29.46. x वस्तुएं प्रतिदिन बेचने वाली एक फर्म का लाभ P (रु. में) इस प्रकार दिया गया है : $P(x)=(150-x)\,x-1625$

वस्तुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो फर्म को अधिकतम लाभ के लिए बनानी चाहिएँ।

हल : यह दिया गया है कि फर्म प्रतिदिन x वस्तुएँ बनाती है तथा बेचती है। अधिकतम लाभ के लिए

$P'(x)=0$ अर्थात् $\frac{dP}{dx}=0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left[(150-x)x-1625\right]=0$$

$$\Rightarrow \qquad 150–2x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = 75$$

अब $\frac{d}{dx}P'(x)=P''(x)=-2$, एक ऋणात्मक संख्या

अतः x = 75 के लिए P (x) अधिकतम है। अतः अधिकतम लाभ के लिए फर्म को प्रतिदिन 75 वस्तुएं बनानी चाहिएं।

अब, अधिकतम लाभ $=P(75)$

$=(150-75)75-1625$

$= (75×75–1625)$ रू

$= (5625–1625)$ रू

$= 4000$ रू

उदाहरण 29.47. r सेमी त्रिज्या वाले गोले के अर्न्तगत बने अधिकतम आयतन वाले बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : माना अन्दर बने बेलन की ऊँचाई h तथा आधार की त्रिज्या R है।

तब $\qquad V=\pi R^2 h \qquad$ ...(i)

$\Delta\, OCB$ से हमें मिलता है

$$r^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+R^2 \qquad ...\left(\because OB^2=OC^2+BC^2\right)$$

$$\therefore \qquad R^2=r^2-\frac{h^2}{4} \qquad ...(ii)$$

अब $\qquad V=\pi\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right)h=\pi r^2 h-\pi\frac{h^3}{4}$

$$\therefore \qquad \frac{dV}{dh}=\pi r^2-\frac{3\pi h^2}{4}$$

अधिकतम तथा न्यूनतम के लिए,

$$\frac{dV}{dh}=0$$

$$\therefore \qquad \pi r^2-\frac{3\pi h^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow \qquad h^2=\frac{4r^2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad h=\frac{2r}{\sqrt{3}}$$

अब $$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3\pi h}{2}$$

$\therefore$ $$\frac{d^2V}{dh^2}\left(h = \frac{2r}{\sqrt{3}} \text{ पर}\right) = -\frac{3\pi \times 2r}{2 \times \sqrt{3}}$$

$$= -\sqrt{3}\pi r < 0$$

$\therefore$ V अधिकतम होगा जब $h = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$

(ii) में $h = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ रखने पर, हमें मिलता है

$$R^2 = r^2 - \frac{4r^2}{4 \times 3} = \frac{2r^2}{3}$$

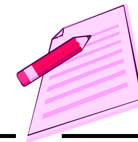
$\therefore$ $$R = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$$

बेलन का अधिकतम आयतन $= \pi R^2 h$

$$= \pi \cdot \left(\frac{2}{3} r^2\right) \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}$$

देखें आपने कितना सीखा 29.11

1. वे संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है तथा एक के वर्ग तथा दूसरे के घन का गुणनफल अधिकतम हो।
2. वे दो धनात्मक संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है तथा जिनके वर्गो का योग न्यूनतम है।
3. सिद्ध कीजिए कि दिये गए परिमाप के आयतों में से वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होगा।
4. सिद्ध कीजिए कि दिये गए कर्ण वाले समकोण त्रिभुज का परिमाप अधिकतम होगा यदि वह त्रिभुज समद्विबाहु हो।
5. एक खिड़की आयताकार है, जिसके उपर एक अर्द्धवृत है। यदि खिड़की का परिमाप 30 मीटर हो तो, उसकी विमाएँ ज्ञात कीजिए, ताकि अधिकतम संभव प्रकाश की मात्रा अन्दर जा सके।
6. एक 100 घन सेमी आयतन वाले बन्द लम्ब वृतीय बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम है।
7. एक ऐसा लम्ब वृतीय बेलन बनाना है कि उसकी त्रिज्या तथा ऊँचाई का योग 6 मीटर हो ऐसे बेलन का अधिकतम आयतन ज्ञात कीजिए।
8. सिद्ध कीजिए कि एक उच्चतम आयतन वाला बेलन, जिसे एक लम्ब वृत्तीय शंकु के अन्तर्गत बनाया जा सके, की (बेलन की) ऊँचाई शंकु की ऊँचाई का एक तिहाई होगी।
9. एक दी गई धारिता (आयतन) का शंक्वाकार टैंट बनाना है। शंकु की ऊँचाई और आधार की त्रिज्या का अनुपात ज्ञात कीजिये, यदि टैंन्ट बनाने के लिए कैनवस की मात्रा न्यूनतम हो।

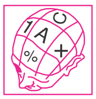


10. एक निर्माता को 16π घनमीटर आयतन के बेलनाकार पात्र की आवश्यकता है। उसकी विमाएँ ज्ञात कीजिए जिसके पृष्ठ बनाने में न्यूनतम मात्रा में पदार्थ (धातु) उपयोग हो।

11. एक चलचित्र हाल का प्रबंधक टिकट की कीमत 55 रूपये से कम करने पर विचार कर रहा है, ताकि अधिक ग्राहक आएँ। विभिन्न बातों की जाँच के पश्चात उसने निश्चय किया कि प्रतिदिन औसत ग्राहकों की संख्या 'q' निम्नलिखित फलन द्वारा दी जाती है :

$$q = 500 + 100x$$

जबकि x, टिकट की घटायी हुई राशि है। टिकट का वह मूल्य ज्ञात कीजिए कि अधिकतम राजस्व प्राप्त हो।



आइये दोहराएँ

- $y = f(x)$, x का एक फलन है।

  x के सापेक्ष, y में प्रति इकाई परिवर्तन की दर

  $\frac{dy}{dx}$, x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर निरूपित करता है।

  यदि $y = f(t)$ तथा $x = g(t)$

  अत: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \frac{dx}{dt} \neq 0$

- $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \varepsilon.\Delta x$

  $\because$ $\varepsilon.\Delta x$ की बहुत ही छोटी राशि है इसे नगण्य मान सकते हैं, इसलिए

  $$\Delta y = \frac{dy}{dx}\cdot \Delta x, \text{ सन्निकटत:}$$

- वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण है :

  $$y - y_1 = [f'(x)]_{(x_1,y_1)\text{पर}}\{x - x_1\}$$

- वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण है

  $$y - y_1 = \left[\frac{-1}{f'(x)}\right]_{(x_1,y_1)\text{पर}}(x - x_1)$$

- वक्र $y = f(x)$ के किसी एक बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण जो x-अक्ष के समान्तर है $y = y_1$ है तथा जो y-अक्ष के समान्तर है $x = x_1$ है।

- **वर्धमान फलन:** एक फलन f(x) को एक बन्द अन्तराल [a,b] में वर्धमान फलन कहा जाता है यदि $f(x_2) \geq f(x_1)$ हो जब $x_2 > x_1$ हो।

- **ह्रासमान फलन :** एक फलन $f(x)$ को एक बन्द अन्तराल $[a,b]$ में ह्रासमान फलन कहा जाता है यदि $f(x_2) \le f(x_1)$ हो जब $x_2 > x_1$ हो।
- $f(x)$ एक खुले अन्तराल]a,b[में वर्धमान फलन होगा यदि सभी $x \in [a, b]$ के लिए $f'(x) > 0$
- $f(x)$ एक खुले अन्तराल]a,b[ह्रासमान फलन होगा यदि सभी के लिए $x \in [a, b]$ $f'(x) < 0$
- **एकदिष्ट फलन :**

  (i) एक फलन को एकदिष्ट (वर्धमान) कहते हैं यदि यह दिये हुए अन्तराल में निरन्तर बढ़ता है।

  (ii) एक फलन को एकदिष्ट (ह्रासमान) कहते हैं यदि दिये हुए अन्तराल में वह निरन्तर घटता है।

  यदि एक फलन एक अन्तराल में वर्धमान तथा ह्रासमान है, तो वह एकदिष्ट फलन नहीं हो सकता।
- एक अन्तराल में एक फलन $f(x)$ के बिन्दु $x = a$ के प्रतिवेश में

  (i) यदि बिन्दु 'a' के बाईं ओर $f'(x) > 0$ तथा बिन्दु x=a के दाईं ओर $f'(x) < 0$ हो तो, बिन्दु $x = a$ पर $f(x)$ का एक स्थानीय उच्चिष्ठ होगा।

  (ii) यदि बिन्दु 'a' के बाईं ओर $f'(x) < 0$, तथा बिन्दु $x = a$ के दाईं ओर $f'(x) > 0$ हो तो $x = a$ पर $f(x)$ का एक स्थानीय निम्निष्ठ होगा।
- यदि $x = a$ पर $f(x)$ का स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा स्थानीय निम्निष्ठ है तथा $f(x)$ अवकलनीय है, तब $f'(a) = 0$

  (i) जब x बिन्दु a के आसपास से जाता है तथा $f'(x)$ धनात्मक से ऋणात्मक चिन्ह बदलता है, तो $f(x)$ का x=a पर स्थानीय उच्चिष्ठ होता है।

  (ii) जब x बिन्दु a के आस-पास से जाता है तथा $f(x)$ ऋणात्मक से धनात्मक चिन्ह बदलता है, तो $f(x)$ का $x = a$ पर स्थानीय निम्निष्ठ होता है।
- **द्वितीय अवकलज जांच (Test)**

  (i) यदि $f'(a) = 0$ तथा $f''(a) < 0$; तो $f(x)$ का $x = a$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ होता है।

  (ii) यदि $f'(a) = 0$ तथा $f''(a) > 0$; तो $f(x)$ का $x = a$ पर स्थानीय निम्निष्ठ होता है।

  (iii) यदि $f'(a) = 0$ तथा $f''(a) = 0$; तो $x = a$ पर उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए $f'(x)$ के चिन्ह परिवर्तन की जाँच करते हैं जब x, 'a' के आस-पास से होकर जाता है।

सहायक वेबसाइट

- *http://mathworld.wolfram.com/PartialDerivative.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_derivative*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Integral*
- *https://www.youtube.com/watch?v=f0pMPjnfars*
- *https://www.youtube.com/watch?v=ySFtitDsCIs*

आइए अभ्यास करें

1. एक वर्ग की भुजा 0.2 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ रही है। वर्ग के परिमाप की वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए।
2. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 सेमी/सेकन्ड की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है?
3. एक आदमी 4.5 किमी/घन्टा की दर/चाल से 120 मी ऊँचे टावर के पाद की ओर आ रहा है। टावर के शीर्ष पर पहुँचने की उसकी क्या दर है, जबकि वह टावर से 50 मी दूर है?
4. एक पाइप से रेत 12 सेमी^{3}/सेकन्ड की दर से गिर रहा है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है?
5. 2मी ऊँचाई का एक आदमी 5मी ऊँचे बिजली के खंभे से 6मी/मिनट की समान चाल से चलता है। उसकी छाया की लम्बाई की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।
6. एक कण, वक्र $y = x^3 + 2$ के अनुदिश घूमता है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x-निर्देशांक की तुलना में y-निर्देशांक 8 गुनी तीव्रता से परिवर्तित हो रहा है।
7. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगे वृत्त में 3.5 सेमी/सेकन्ड की गति से चलती हैं जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 7.5 सेमी है तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है?
8. एक पत्थर स्थिर तालाब में डाला जाता है तथा वह एक केन्द्रीय वृत्त श्रृंखला बनाता है। दर ज्ञात कीजिए जब उनमें से एक का व्यास 12 सेमी हो यह मानकर कि प्रारम्भ में केन्द्र पर तरंग की दर 3 सेमी/सेकन्ड है।
9. वक्र $y^2 = 8x$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए, जिसके लिए x-निर्देशांक तथा y-निर्देशांक के परिवर्तन की दर समान है।
10. एक कण वक्र $y = \frac{2}{3}x^3 + 1$ के अनुगत गति कर रहा है। वक्र पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x-निर्देशांक की तुलना में y-निर्देशांक 2 गुना तीव्रता से बदल रहा है।
11. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ (रुपयों में) से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जबकि 5 इकाइयों का उत्पादन बेचा गया है।
12. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से सम्बन्ध कुल लागत (रुपयों में)

    $$C(x) = 0.005x^3 - 0.02x^2 + 30x + 5000$$

    से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जबकि 3 इकाईयों का उत्पादन किया गया है।

अवकलों का प्रयोग करके निम्नलिखित का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए (13 – 19)

13. $\sqrt{25.02}$ 14. $\sqrt{49.5}$

15. (i) $\sqrt{401}$ (ii) $\sqrt{0.24}$

16. (i) $\sqrt{0.0037}$ (ii) $(26)^{\frac{1}{3}}$

17. (i) $(66)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(82)^{\frac{1}{4}}$

18. (i) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$ (ii) $(31.9)^{\frac{1}{5}}$

19. (i) $\dfrac{1}{(2.002)^2}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{25.1}}$

20. $f(3.02)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$

21. भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x के घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

22. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 1% ह्रास के कारण घन के पृष्ठ क्षेत्रफल में होने वाले सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

23. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 1% वृद्धि के कारण घन के आयतन में होने वाला सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

24. $f(5.001)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$

25. निम्न में से प्रत्येक वक्र पर स्थित इंगित बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए :

(i) $y = \sqrt{x}$, $x = 9$ पर (ii) $y = x^3 + x$, $x = 2$ पर

(iii) $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ पर

(iv) $y = 2x^2 + \cos x$, $x = 0$ पर (v) $xy = 6$, $(1,6)$ पर

26. वक्र $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ के बिंदु $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

27. वक्र $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है।

28. वक्र $y = x^2 - 2x + 5$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(i) $2x + y + 7 = 0$ के समान्तर है। (ii) रेखा $5(y - 3x) = 12$ पर लम्बवत् है।

29. दर्शाइए कि वक्र $y = 7x^3 + 11$ के बिन्दुओं $x = 2$ तथा $x = -2$ पर स्पर्श रेखाएँ समान्तर हैं।

30. वक्र $ay^2 = x^3$ के बिन्दु $\left(am^2, am^3\right)$ पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

31. दर्शाइए कि सभी $x \in R$ के लिए $f(x) = x^2$ न तो वर्धमान फलन है और न ही ह्रास मान फलन। निम्नलिखित फलनों $(2-5)$ के लिए वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जहाँ फलन वर्धमान अथवा ह्रासमान है :

32. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

33. $\frac{x}{4} + \frac{4}{x}, x \neq 0$

34. $x^4 - 2x^2$

35. $\sin x - \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$

निम्नलिखित फलनों के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए :

36. (a) $x^3 - 6x^2 + 9x + 7$ (b) $2x^3 - 24x + 107$

(c) $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ (d) $x^4 - 62x^2 + 120x + 9$

37. (a) $\frac{1}{x^2 + 2}$ (b) $\frac{x}{(x-1)(x-4)}, 1 < x < 4$

(c) $x\sqrt{1-x}, \quad x < 1$

38. (a) $\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (b) $\sin 2x \quad, 0 \leq x \leq 2\pi$

(c) $-x + 2\sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$

39. अन्तराल $[0,5]$ में x के किस मान के लिए वक्र $x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता अधिकतम है। वह बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

40. वक्र $-x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ के एक बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता अधिकतम है। वह बिन्दु भी ज्ञात कीजिए

41. एक बंद लम्ब वृत्तीय बेलनाकार पात्र बनाना है जिसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 24π वर्गमीटर हो। पात्र का आयतन अधिकतम होने के लिए उसकी विमाएँ ज्ञात कीजिए।

42. एक होटल कॉम्पलेक्स जिसमें 400 कमरे हैं, के 300 कमरे, 360 रूपये प्रतिदिन के किराए पर चढ़े हैं। प्रबन्धन की खोजबीन से पता चलता है कि यदि किराया x रूपये कम कर दिया जाए, तो किराये पर चढ़े हुए कमरे $q = \frac{5}{4}x + 300, 0 \leq x \leq 80$ द्वारा प्रदर्शित होते हैं।

वह किराया ज्ञात कीजिए, कि राजस्व अधिकतम हो। अधिकतम राजस्व भी ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 29.1

1. 64 सेमी^{2}/मिनट
2. 900 सेमी^{3}/सेकन्ड
3. 12π सेमी^{2}/सेमी
4. 11.2π सेमी^{2}/सेकन्ड
5. 75 सेमी^{3}/सेमी

देखें आपने कितना सीखा 29.2

1. 6.05
2. 2.926
3. 1.96875
4. 5.1
5. 3.92π मी^{3}
6. 3%

देखें आपने कितना सीखा 29.3

1. (i) $10, -\frac{1}{10}$ (ii) $-\frac{2}{5}, \frac{5}{2}$ (iii) $1, -1$
2. $p = 5,\ q = -4$
3. $(3, 3), (-3, -3)$
4. $(3, 2)$

देखें आपने कितना सीखा 29.4

	स्पर्श रेखा	अभिलंब
1.	(i) $y + 10x = 5$	$x - 10y + 50 = 0$
	(ii) $2x - y = 1$	$x + 2y - 3 = 0$
	(iii) $24x - y = 52$	$x + 24y = 483$

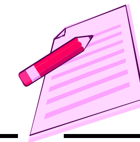
2. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$
3. $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$
4. $x + 14y - 254 = 0,\ x + 14y + 86 = 0$

देखें आपने कितना सीखा 29.6

2. $\left(\frac{1}{196}, \frac{-43}{14}\right)$

देखें आपने कितना सीखा 29.8

1.	वर्धमान	ह्रासमान
(a)	$x > \frac{7}{2}$ के लिए	$x < \frac{7}{2}$ के लिए



टिप्पणी

(b) $x > \frac{5}{2}$ के लिए $\qquad$ $x < \frac{5}{2}$ के लिए

2\. (a) $x > 6$ के लिए $\qquad$ $-2 < x < 6$ के लिए

(b) $x > 4$ अथवा $x < 2$ के लिए $\qquad$ अन्तराल $]2,4[$ में

3\. (a) $x < -2$ के लिए $\qquad$ $x > -2$ के लिए

(b) अन्तराल $-1 < x < -2$ में $\qquad$ $x > -1$ अथवा $x < -2$ के लिए

4\. (a) सदा

(b) $x > 2$ $\qquad$ अन्तराल $0 < x < 2$

(c) $x > 2$ अथवा $x < -2$ $\qquad$ अन्तराल $-2 < x < 2$

5\. (c) $\frac{3\pi}{8} \le x \le \frac{7\pi}{8}$ $\qquad$ $0 \le x \le \frac{3\pi}{8}$

बिन्दु जहाँ स्पर्श रेखाएँ x–के समान्तर हैं $x = \frac{3\pi}{8}$ तथा $x = \frac{7\pi}{8}$

देखें आपने कितना सीखा 29.9

	स्थानीय निम्निष्ठ	स्थानीय उच्चिष्ठ
1.	$x = 4$ पर -4	—
2.	$x = 3$ पर 15	$x = 1$ पर 19
3.	$x = 6$ पर -128	$x = 1$ पर -3
4.	$x = -6$ पर -1647, $x = 5$ पर -316	$x = 1$ पर 68
5.	$x = 0$ पर -4	$x = -2$ पर 0.
6.	$x = -1$ पर -1	$x = 3$ पर $\frac{1}{7}$

देखें आपने कितना सीखा 29.10

	स्थानीय निम्निष्ठ	स्थानीय उच्चिष्ठ
1.	$x = 2$ पर -34	$x = -3$ पर 91
2.	$x = 0$ पर -5	$x = 8$ पर 251
3.	$x = 0$ पर -4	$x = -2$ पर 0
4.	$x = 3$ पर -28	$x = 1$ पर 0

$x = 0$ पर न उच्चिष्ठ न निम्निष्ठ

5.	–	$x=\frac{\pi}{3}$ पर $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
6.	–	$x=\frac{\pi}{4}$ पर $\sqrt{2}$
7.	$x=-\frac{\pi}{6}$ पर $\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$	$x=\frac{\pi}{6}$ पर $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

देखें आपने कितना सीखा 29.11

1. संख्याए हैं : 6,9 2. दो भाग हैं : 7.5, 5.5

5. दोनों विमाएँ हैं $\frac{30}{\pi+4}, \frac{30}{\pi+4}$ मी

6. त्रिज्या $=\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ सेमी, ऊँचाई $=2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ सेमी

7. अधिकतम आयतन =32 मी^{3}

9. $h=\sqrt{2}r$ 10. $r=2$ मी, $h=4$ मी

11. 3000 रु

आइए अभ्यास करें

1. 0.8 सेमी/सेकन्ड 2. 1.4π सेमी/सेकन्ड
3. $\frac{45}{26}$ किमी/घन्टा 4. $\frac{1}{48\pi}$ सेमी/सेकन्ड
5. 4 मीटर/मिनट 6. (4, 11), $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$
7. 52.5π सेमी^{2}/सेकन्ड 8. 36π सेमी^{3}/सेकन्ड
9. (2, 4) 10. $\left(1, \frac{5}{3}\right), \left(-1, \frac{1}{3}\right)$
11. ₹ 66 12. ₹ 30.015
13. 5.002 14. 7.0357
15. (i) 20.025 (ii) 0.49 16. (i) 0.0608 (ii) 2.963
17. (i) 4.0417 (ii) 3.0093 18. (i) 2.001875 (ii) 1.99875

19. (i) 0.2495 (ii) 0.1996   20. 77.66

21. $0.09x^3$ मी^{3} या 9%   22. $0.12x^2$ मी^{2}

23. $0.03x^3$ मी^{3} या 3%   24. –34.995

25. (i) $\frac{1}{6}, -6$ (ii) $13, -\frac{1}{13}$ (iii) $1, -1$ (iv) 0, परिभाषित नहीं   (v) $-6, \frac{1}{6}$

26. $2\sqrt{2}(x+y)=a;\ x+y=0$ 27. $(3,0), (-3,0)$

28. (i) $2x+y-5=0$ (ii) $12x+36y=155$

30. $2x+3my-am^2(2+3m^2)=0$

	वर्धमान	ह्रासमान
32.	$x>2$ अथवा $x<-1$ पर	अन्तराल $-1<x<2$ में
33.	$x>4$ अथवा $x<-4$	अन्तराल]–4,4[में
34.	$x>1$ अथवा $-1<x<0$ में	$x<-1$ अथवा $0<x<1$ में
35.	$0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$ अथवा $\frac{7\pi}{4} \le x \le 2\pi$ में	$\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$. में

		स्थानीय उच्चिष्ठ	स्थानीय निम्निष्ठ
36.	(a)	$x=1$ पर 11	$x=3$ पर 7
	(b)	$x=-2$ पर 139	$x=2$ पर 75
	(c)	$x=-3$ पर 20	$x=\frac{1}{3}$ पर $\frac{40}{27}$
	(d)	$x=1$ पर 68	$x=5$ पर -316 तथा $x=-6$ पर -1647
37.	(a)	$x=0$ पर $\frac{1}{2}$	
	(b)	$x=2$ पर -1	–
	(c)	$x=\frac{2}{3}$ पर $\frac{2}{3\sqrt{3}}$	–
38.	(a)	$x=\frac{\pi}{6}$ पर $\frac{3}{4}$	$x=\frac{\pi}{2}$ पर $\frac{1}{2}$
	(b)	$x=\frac{5\pi}{4}$ तथा $x=\frac{\pi}{4}$ पर 1	$x=\frac{3\pi}{4}$ पर -1

(c) $x = \frac{\pi}{3}$ पर $\frac{-\pi}{4} + \sqrt{3}$ $x = \frac{5\pi}{3}$ पर $\frac{-5\pi}{3} - \sqrt{3}$

39. अधिकतम प्रवणता $x = 5$ पर 24; बिन्दु (5, 24)

40. अधिकतम प्रवणता $x = 1$ पर 5; बिन्दु (1,–23)

41. आधाार की त्रिज्या = 2 मी, बेलन की ऊँचाई = 4 मीटर

42. घटा हुआ किराया: 300 रु अधिकतम राजस्व = 112500 रु

30

समाकलन

पिछले पाठ में, आपने एक फलन के अवकलज की संकल्पना का अध्ययन किया। आपने विभिन्न स्थितियों में अवकलज के अनुप्रयोग भी सीखे।

अब इसका विपरीत प्रश्न लीजिए जहाँ मूल फलन ज्ञात करना है, जबकि इसका अवकलज (फलन के रूप में) दिया गया है। इस विपरीत प्रक्रिया को समाकलन का नाम दिया गया है। इस पाठ में हम समाकलन की संकल्पना इसकी विभिन्न विधियों तथा तकनीकों का अध्ययन करेगें।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- समाकलन को अवकलन की प्रतिलोम क्रिया बताना
- $x^n, \sin x, \cos x, \sec^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \sec x \tan x, \operatorname{cosec} x \cot x, \frac{1}{x}, e^x$ आदि सरल फलनों के समाकलन ज्ञात करना
- निम्नलिखित परिणामों के कथन देना :

  (i) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

  (ii) $\int [\pm k f(x)]\, dx = \pm k \int f(x)\, dx$
- बीजीय, त्रिकोणमितीय, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय तथा चरघातांकीय (exponential) फलनों के समाकलन ज्ञात करना।
- प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन ज्ञात करना।
- निम्नलिखित प्रकार के समाकलों के मान ज्ञात करना :

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}, \int \frac{dx}{a^2 - x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \frac{(px+q)\, dx}{ax^2 + bx + c}, \int \frac{(px+q)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

- परिणाम $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ell n |f(x)| + C$ का व्युत्पन्न करना तथा इसका उपयोग करना।

- खंडशः समाकलन विधि को बताना तथा इसका उपयोग करना।
- निम्नलिखित प्रकार के समाकलों के मान ज्ञात करना :

$$\int\sqrt{x^2 \pm a^2}dx,\ \int\sqrt{a^2 - x^2}dx,\ \int e^{ax}\sin bx\ dx,\ \int e^{ax}\cos bx\ dx,$$

$$\int(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx,\ \int\sin^{-1}x\ dx,\ \int\cos^{-1}x\ dx,$$

$$\int\sin^n x\cos^m x\ dx,\ \int\frac{dx}{a+b\sin x},\ \int\frac{dx}{a+b\cos x}$$

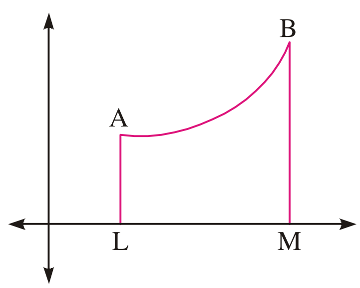
- परिणाम $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = e^x f(x)+c$ को व्युत्पन्न करना तथा इसका उपयोग करना
- आंशिक भिन्न के उपयोग से परिमेय व्यंजकों के समाकल ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- विभिन्न फलनों का अवकलन
- समतल ज्यामिति का मूल ज्ञान
- बीजीय व्यंजक का गुणनखण्डन
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का ज्ञान

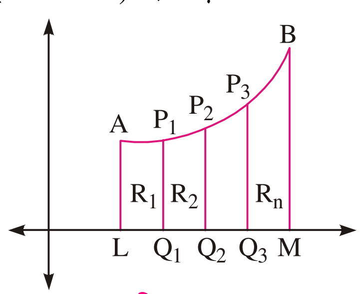
30.1 समाकलन

समाकलन का शाब्दिक अर्थ है संकलन। उदाहरणार्थ नीचे दिए गये चित्र में क्षेत्र ALBM के क्षेत्रफल ज्ञात करने के विषय पर विचार कीजिए (चित्र 30.1)

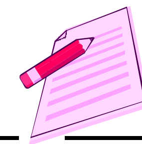


चित्र 30.1

इस क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए एक प्रयोगात्मक विधि का प्रयोग किया जा सकता है, परन्तु वह विधि सदैव उपयुक्त नहीं कही जा सकती। इसलिए हम इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए समाकलन (अर्थात संकलन) की सहायता लेते हैं। इसके लिए हम उपरोक्त चित्र को छोटे-छोटे आयताकार क्षेत्रों में बांट लेते हैं। (चित्र 30.2) देखिए।



चित्र 30.2



इन आयताकार क्षेत्रों का क्षेत्रफल तब तक ज्ञात नहीं किया जा सकता जब तक कि उनकी चौड़ाई न्यूनतम (अर्थात $\to 0$) न हो जाए।

आर्किमिडीज ने 2000 वर्ष पूर्व इसी तकनीक का उपयोग क्षेत्रफल, आयतन, आदि ज्ञात करने में किया था। न्यूटन (1642–1727) तथा लिबनीज़ (1646–1716) के नाम प्रायः आधुनिक अवकल व समाकल गणित (कलन) के जन्मदाता के रूप में लिए जाते हैं।

फलनों के समाकलन के अध्ययन को समाकल गणित कहते हैं। इस विषय के अनेकों अनुप्रयोग ज्यामिति, यांत्रिकी, प्राकृतिक विज्ञान तथा अन्य विषयों में पाए जाते हैं।

इस पाठ में हम बहुपदीय त्रिकोणमितीय चरघातांकीय, लधुगणकीय तथा परिमेय फलनों का समाकल करना सीखेंगें जिसमें समाकलन की विभिन्न तकनीकों का उपयोग किया जाएगा।

30.2 समाकलन, अवकलन की विपरीत क्रिया के रूप में

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

(i) $\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$ (ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (iii) $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$

आइये अब उपर्युक्त उदाहरणों को एक अन्य रूप में लें।

(i) x^2 का अवकलन करने पर फलन $2x$ प्राप्त होता है।

$\Rightarrow x^2$ को $2x$ का प्रतिअवकलज कहते हैं।

(ii) $\sin x$ का अवकलन करने पर $\cos x$ प्राप्त होता है।

$\Rightarrow \sin x$ को $\cos x$ का प्रतिअवकलज कहते हैं।

(iii) इसी प्रकार e^x, फलन e^x का प्रतिअवकलज कहलाता है।

सामान्यतः प्रतिअवकलज धारणा को एक संक्रिया के रूप में व्यक्त किया जाता है। इस संक्रिया को समाकलन की संक्रिया कहते हैं।

हम लिखते हैं :

1. $2x$ का समाकलन x^2 है।
2. $\cos x$ का समाकलन $\sin x$ है।
3. e^x का समाकलन e^x है।

समाकलन संक्रिया को प्रतीक $\int$ के द्वारा निरूपित किया जाता है।

इस प्रकार :

1. $\int 2x\,dx = x^2$ 2. $\int \cos x\,dx = \sin x$ 3. $\int e^x\,dx = e^x$

याद रखिए कि x के सापेक्ष समाकलन संक्रिया के निरूपण में प्रतीक $\int$ के साथ प्रतीक dx भी लिखा जाता है। समाकलित किये जाने वाले फलन को $\int$ तथा dx के बीच में रखा जाता है।

परिभाषा : यदि $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$ तो $f(x)$, $f'(x)$ का समाकल कहलाता है तथा हम इसे लिखते हैं :

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

यहाँ समाकलित किये जाने वाला फलन $f'(x)$ **समाकल्य** कहलाता है।

समाकलन का स्थिरांक :

यदि $\qquad y = x^2$ तो $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

$\therefore \qquad \int 2x dx = x^2$

अब $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 + 2\right)$ अथवा $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 + c\right)$ जबकि c कोई वास्तविक स्थिरांक है, पर विचार कीजिए इनमें से प्रत्येक $2x$ के बराबर है। इसलिए हम देखते हैं कि $2x$ का समाकल अद्वितीय नहीं है। $\int 2x\, dx$ के विभिन्न मानों में स्थिरांक का अन्तर होता है। इस प्रकार $\int 2x\, dx = x^2 + c$ जहाँ c समाकलन का स्थिरांक कहलाता है।

इसी प्रकार $\qquad \int e^x\, dx = e^x + c$ तथा $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

सामान्यत: $\int f'(x)\, dx = f(x) + c$ स्थिरांक c का मान कोई भी हो सकता है।

हम देखते हैं कि:

एक समाकल का अवकलन समाकल्य के समान होता है।

टिप्पणी: $\int f(x)\, dx$, $\int f(y)\, dy$, $\int f(z)\, dz$ होते हैं परन्तु $\int f(z)\, dx$ नहीं होता।

30.3 सरल फलनों का समाकलन

	समाकल	जांच
1.	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ जबकि n एक स्थिरांक है तथा $n \neq -1$	$\because \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c\right) = x^n$
2.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\because \dfrac{d}{dx}(-\cos x + c) = \sin x$
3.	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\because \dfrac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$
4.	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$	$\because \dfrac{d}{dx}(\tan x + c) = \sec^2 x$
5.	$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$	$\because \dfrac{d}{dx}(-\cot x + c) = \operatorname{cosec}^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$	$\because \dfrac{d}{dx}(\sec x + c) = \sec x \tan x$
7.	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$	$\because \dfrac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x + c) = \operatorname{cosec} x \cot x$
8.	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$	$\because \dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + c\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

टिप्पणी

9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + c$ $\quad \because \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x + c\right) = \frac{1}{1+x^2}$

10. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}x + c$ $\quad \because \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x + c\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

11. $\int e^x dx = e^x + c$ $\quad \because \frac{d}{dx}\left(e^x + c\right) = e^x$

12. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$ $\quad \because \frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a} + c\right) = a^x$

13. $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$ $\quad \because \frac{d}{dx}\left(\log|x| + c\right) = \frac{1}{x}$ if $x > 0$

ध्यान दीजिए

1. x^n का समाकल ज्ञात करने के लिए x के घांताक में एक जोड़ो तथा परिणाम को नई घांताक से भाग करो और स्थिरांक c जमा करो।

2. $\int \frac{1}{f(x)}dx$ को प्रायः $\int \frac{dx}{f(x)}$ लिखा जाता है।

देखें आपने कितना सीखा 30.1

1. $\int x^{\frac{5}{2}}\, dx$ के कोई पांच विभिन्न मान लिखिए।

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक का अनिश्चित समाकल लिखिए :

 (a) x^5 (b) $\cos x$ (c) 0

3. मान ज्ञात कीजिए :

 (a) $\int x^6 dx$ (b) $\int x^{-7} dx$ (c) $\int \frac{1}{x}dx$ (d) $\int 3^x (5)^{-x}\, dx$

 (e) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$ (f) $\int x^{-9}\, dx$ (g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (h) $\int \sqrt[9]{x^{-8}}\, dx$

4. मान ज्ञात कीजिए :

 (a) $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$ (b) $\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

 (c) $\int \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ (d) $\int \frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$

30.4 समाकलों के गुणधर्म

यदि किसी फलन को दो या दो से अधिक फलनों के योग के रूप में लिखा जा सके तो ऐसे फलन का समाकल इसके सभी घटकों के समाकलों का योग होता है।

जैसे यदि $f(x) = x^7 + x^3$ हो तो

$$\int f(x)\,dx = \int [x^7 + x^3]\,dx$$
$$= \int x^7 dx + \int x^3 dx$$
$$= \frac{x^8}{8} + \frac{x^4}{4} + c$$

इसलिए सामान्यत: दो फलनों के योग का समाकल उनके अलग-अलग समाकलों के योग के बराबर होता है।

अर्थात $\quad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

इसी प्रकार यदि दिया गया फलन $f(x) = x^7 - x^2$ हो तो हम लिख सकते हैं कि

$$\int f(x)\,dx = \int \left(x^7 - x^2\right) dx = \int x^7 dx - \int x^2 dx = \frac{x^8}{8} - \frac{x^3}{3} + c$$

दो फलनों के अन्तर का समाकल उन दोनों के अलग-अलग समाकलों के अन्तर के बराबर होता है।

अर्थात $\quad \int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

यदि एक फलन f(x) किसी स्थिरांक (k) तथा किसी अन्य फलन $\left[g(x)\right]$ का गुणनफल है। अर्थात $f(x) = kg(x)$, तब हम $f(x)$ का समाकलन इस प्रकार करते हैं

$$\int f(x)\,dx = \int kg(x)\,dx = k\int g(x)\,dx$$

उदाहरण 30.1. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int 4^x dx$ $\qquad$ (ii) $\int (2)^x (3)^{-x}\,dx$

हल : (i) $\int 4^x dx = \dfrac{4^x}{\log 4} + c$

(ii) $\int (2^x)(3^{-x})\,dx = \int \dfrac{2^x}{3^x} dx = \int \left(\dfrac{2}{3}\right)^x dx = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} + c$

ध्यान दीजिए (ii) में यह कहना ठीक नहीं है कि

$$\int 2^x 3^{-x} dx = \int 2^x dx \int 3^{-x} dx$$

क्योंकि $\quad \int 2^x dx \int 3^{-x} dx = \dfrac{2^x}{\log 2}\left(\dfrac{3^{-x}}{\log 3}\right) + c \neq \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} + c$

दो फलनों के गुणन का समाकल सदैव उन फलनों के अलग-अलग समाकलों के गुणनफल के समान नहीं होता। हम फलनों के गुणनफल के समाकल पर अगले पाठ में विचार करेंगें।

उदाहरण 30.2. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \frac{dx}{\cos^n x}$, जबकि $n = 0$ और $n = 2$ (ii) $\int -\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$

हल : (i) जब $n = 0$, $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{dx}{\cos^o x} = \int \frac{dx}{1} = \int dx$

अब $\int dx$ को $\int x^0 dx$ लिखा जा सकता है।

$$\therefore \qquad \int dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$$

जब $n = 2$,

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

(ii) $\int -\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \int \frac{-1}{\sin^2\theta}\, d\theta = -\int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = \cot\theta + c$

उदाहरण 30.3. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3}\, dx$

(iii) $\int \frac{1 - x}{\sqrt{x}}\, dx$ (iv) $\int \left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx$

हल : (i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx = -\cos x + \sin x + c$

(ii) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3}\, dx = \int \left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^3}\, dx$

$$= \log|x| + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \log|x| - \frac{1}{2x^2} + c$$

(iii) $\int \frac{1 - x}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3} x^{3/2} + c$

(iv) $\int \left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx = \int \frac{dx}{1 + x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \tan^{-1} x - \sin^{-1} x + c$

उदाहरण 30.4. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \sqrt{1 - \sin 2\theta}\, d\theta$ (ii) $\int \left(4e^x - \frac{3}{x\sqrt{x^2 - 1}} \right) dx$

(iii) $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx$ (iv) $\int \left(\frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} \right) dx$

हल : (i) $\sqrt{1-\sin 2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta}$

$$\left[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right] = \sqrt{(\cos\theta - \sin\theta)^2} = \pm(\cos\theta - \sin\theta)$$

(चिन्ह का चयन θ के मान पर निर्भर करता है।)

(a) यदि $\sqrt{1-\sin 2\theta} = \cos\theta - \sin\theta$ तब $\int\sqrt{1-\sin 2\theta}\, d\theta = \int(\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta$

$$= \int\cos\theta\, d\theta - \int\sin\theta\, d\theta = \sin\theta + \cos\theta + c$$

(b) यदि $\int\sqrt{1-\sin 2\theta}\, d\theta = \int(-\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$

$$= -\int\cos\theta\, d\theta + \int\sin\theta\, d\theta = -\sin\theta - \cos\theta + c$$

(ii) $$\int\left(4e^x - \frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\right)dx = \int 4e^x dx - \int\frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= 4\int e^x dx - 3\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = 4e^x - 3\sec^{-1}x + c$$

(iii) $$\int(\tan x + \cot x)^2\, dx = \int\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x\cot x\right)dx$$

$$= \int\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\right)dx = \int\left(\tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1\right)dx$$

$$= \int\left(\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x\right)dx = \int\sec^2 x\, dx + \int\operatorname{cosec}^2 x\, dx$$

$$= \tan x - \cot x + c$$

(iv) $$\int\left(\frac{x^6-1}{x^2+1}\right)dx = \int\left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{2}{x^2+1}\right)dx \quad [\text{dividing } x^6-1 \text{ by } x^2+1]$$

$$= \int x^4 dx - \int x^2 dx + \int dx - 2\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - 2\tan^{-1}x + c$$

उदाहरण 30.5. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$ (ii) $\int\left(\frac{4e^{5x} - 9e^{4x} - 3}{e^{3x}}\right)dx$

हल : (i) $$\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx = \int\left(x^{3/2} + 3x\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{3/2}}\right)dx$$

$$= \int x^{3/2}dx + 3\int\sqrt{x}\, dx + 3\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int\frac{dx}{x^{3/2}}$$

$$= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + 3\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + 3\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c$$

(ii) $$\int\left(\frac{4e^{5x} - 9e^{4x} - 3}{e^{3x}}\right)dx = \int\frac{4e^{5x}}{e^{3x}}dx - \int\frac{9e^{4x}}{e^{3x}}dx - \int\frac{3dx}{e^{3x}}$$

$$= 4\int e^{2x}\,dx - 9\int e^{x}\,dx - 3\int e^{-3x}\,dx$$

$$= 2e^{2x} - 9e^{x} + e^{-3x} + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.2

1. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int\left(x + \frac{1}{2}\right)dx$ (b) $\int\frac{-x^2}{1+x^2}dx$ (c) $\int\left(10x^9 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

(d) $\int\left(\frac{5+3x-6x^2-7x^4-8x^6}{x^6}\right)dx$ (e) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$ (f) $\int\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

2. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$ (b) $\int\tan^2 x dx$ (c) $\int\frac{2\cos x}{\sin^2 x}dx$

(d) $\int\frac{dx}{1-\cos 2x}$ (e) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ (f) $\int(\operatorname{cosec} x - \cot x)\operatorname{cosec} x\,dx$

3. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ (b) $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ (c) $\int\frac{1}{1-\cos 2x}dx$

4. मान ज्ञात कीजिए :

$\int\sqrt{x+2}\,dx$

30.5 समाकलन की तकनीकें (Techniques of Integration)

30.5.1 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन

इस विधि में हम $\int f(x)\,dx$ को किसी दूसरे चरांक में, रूपान्तर कर देते हैं जिससे कि परिणामी फलन पिछले अनुच्छेद में दी गई विधियों द्वारा समाकलित किया जा सके।

सबसे पहले हम $f(ax+b)$, $a \neq 0$ की तरह के फलनों का समाकल ज्ञात करेगें जबकि $f(x)$ एक मानक फलन है।

उदाहरण 30.6. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \sin(ax+b)\,dx$$

हल : $\int \sin(ax+b)\,dx$

मान लीजिए $ax+b=t$.

तब $a=\dfrac{dt}{dx}$ या $dx=\dfrac{dt}{a}$

$$\therefore \quad \int \sin(ax+b)\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{a}$$ (यहां समाकलन गुणक को dt लिखा जाएगा)

$$= \frac{1}{a}\int \sin t\,dt = \frac{1}{a}(-\cos t)+c = -\frac{\cos(ax+b)}{a}+c$$

उदाहरण 30.7. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int (ax+b)^n\,dx$, जबकि $n \neq -1$ (ii) $\int \dfrac{1}{(ax+b)}\,dx$

हल : (i) $\int (ax+b)^n\,dx$, जबकि $n \neq -1$

मान लीजिए $ax+b=t \Rightarrow a=\dfrac{dt}{dx}$ या $dx=\dfrac{dt}{a}$

$$\therefore \quad \int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\int t^n dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{(n+1)}+c$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c$$ जबकि $n \neq -1$

(ii) $\int \dfrac{1}{(ax+b)}\,dx$

मान लीजिए $ax+b=t$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{a}dt$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{(ax+b)}\,dx = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\log|t|+c = \frac{1}{a}\log|ax+b|+c$$

उदाहरण 30.8. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int e^{5x+7}dx$$

हल : $\int e^{5x+7}dx$

मान लीजिए $5x+7=t$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{dt}{5}$$

$$\therefore \qquad \int e^{5x+7} dx = \frac{1}{5}\int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + c = \frac{1}{5} e^{5x+7} + c$$

इसी प्रकार $\qquad \boldsymbol{\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c}$

ध्यान दीजिए:

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \log |ax+b| + c$$

$$\int \sin (ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos (ax+b) + c$$

$$\int \cos (ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin (ax+b) + c$$

$$\int \sec^2 (ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \tan (ax+b) + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 (ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cot (ax+b) + c$$

$$\int \sec (ax+b) \tan (ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sec (ax+b) + c$$

$$\int \operatorname{cosec} (ax+b) \cot (ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cosec} (ax+b) + c$$

उदाहरण 30.9. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \sin^2 x \, dx$ (ii) $\int \sin^3 x \, dx$ (iii) $\int \cos^3 x \, dx$ (iv) $\int \sin 3x \sin 2x \, dx$

हल : फलन को x के गुणज के साइन और कोसाइन के रूप में लिखने के लिए, यहां हम त्रिकोणमित्तीय सर्वसमिकाओं का उपयोग करते हैं।

(i) $$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx \qquad \left[\because \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}\int 1 dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

(ii) $$\int \sin^3 x \, dx = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} dx \qquad \left[\because \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x) \, dx = \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right] + c$$

(iii) $$\int \cos^3 x \, dx = \int \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} dx \quad \left[\because \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \right]$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x) \, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x \right] + c$$

(iv) $$\int \sin 3x \, \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 3x \, \sin 2x \, dx$$

$$[\because 2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x) \, dx = \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 5x}{5} \right] + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.3

1. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \sin(4 - 5x) \, dx$ (b) $\int \sec^2(2 + 3x) \, dx$

(c) $\int \sec\left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx$ (d) $\int \cos(4x + 5) \, dx$

(e) $\int \sec(3x + 5) \tan(3x + 5) \, dx$ (f) $\int \operatorname{cosec}(2 + 5x) \cot(2 + 5x) \, dx$

2. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{dx}{(3 - 4x)^4}$ (b) $\int (x + 1)^4 \, dx$ (c) $\int (4 - 7x)^{10} \, dx$

(d) $\int (4x - 5)^3 \, dx$ (e) $\int \frac{1}{3x - 5} dx$ (f) $\int \frac{1}{\sqrt{5 - 9x}} dx$

(g) $\int (2x + 1)^2 \, dx$ (h) $\int \frac{1}{x + 1} dx$

3. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int e^{2x+1} dx$ (b) $\int e^{3-8x} dx$ (c) $\int \frac{1}{e^{(7+4x)}} dx$

4. मान ज्ञात कीजिए :

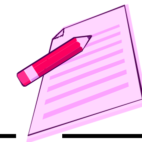
(a) $\int \cos^2 x \, dx$ (b) $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

(c) $\int \sin 4x \, \cos 3x \, dx$ (d) $\int \cos 4x \, \cos 2x \, dx$

30.5.2 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ की तरह के फलनों का समाकलन

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ का मान ज्ञात करने के लिए हम $f(x) = t$ रख लेते हैं, तब $f'(x) \, dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t}$$



$$= \log|t| + c \;= \log|f(x)| + c$$

ऐसा फलन जिसका अंश, हर का अवकल हो, उसका समाकल हर का लघुगुणक होता है।

उदाहरण 30.10. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}$

हल : (i) यहां अंश $2x$ हर (x^2+1) का अवकल है

$\therefore$ उपरोक्त नियम का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log\left|x^2+1\right| + c$$

(ii) $\left(3+\sqrt{x}\right)$ का अवकल $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ है

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = \log\left|3+\sqrt{x}\right| + c$$

उदाहरण 30.11. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

हल : (i) $e^x - e^{-x}$ का अवकल $e^x + e^{-x}$ है

$$\therefore \qquad \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx = \log\left|e^x-e^{-x}\right| + c$$

दूसरी विधि : माना $e^x - e^{-x} = t$. तब $\left(e^x+e^{-x}\right)dx = dt$

$$\therefore \qquad \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c \;= \log\left|e^x-e^{-x}\right| + c$$

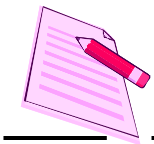
(ii) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

यहाँ $e^{2x}-1$(अंश), $e^{2x}+1$(हर) का अवकल नहीं है परन्तु यदि हम अंश और हर दोनों को e^{-x} से गुणा कर दें तो दिया गया फलन बन जाता है

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$$

$$\therefore \qquad \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$= \log\left|e^x+e^{-x}\right| + c \qquad (\because \text{ अंश } e^x - e^{-x} \text{ हर } e^x + e^{-x} \text{ का अवकल है})$$



टिप्पणी

देखें आपने कितना सीखा 30.4

1 मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{x}{3x^2-2}dx$ (b) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ (c) $\int \frac{2x+9}{x^2+9x+30}dx$

(d) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+3}dx$ (e) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-5}dx$ (f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(5+\sqrt{x}\right)}$

(g) $\int \frac{dx}{x\left(8+\log x\right)}$

2. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{e^x}{2+be^x}dx$ (b) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

30.5.3 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन के कुछ और उदाहरण

उदाहरण 30.12. मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int \tan x\, dx$ (ii) $\int \sec x\, dx$

हलः (i) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{-\sin x\, dx}{\cos x}$

मान लीजिए $\cos x = t.$ तब $-\sin x\, dx = dt$

$$\therefore \quad \int \tan x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c$$

$$= \log\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = \log|\sec x| + c$$

इसी प्रकार $\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + c$

(ii) $\int \sec x\, dx$

$\sec x$ का समाकलन ऐसे ही नहीं किया जा सकता क्योंकि $\sec x$ स्वयं किसी फलन का अवकल नहीं है। जबकि फलनों $\sec^2 x$ तथा $\sec x \tan x$ के लिए ऐसा नहीं है।

अब $\int \sec x\, dx$ को हम लिख सकते हैं

$$= \int \sec x \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}dx = \int \frac{(\sec^2 x + \sec x \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$$

मान लीजिए $\sec x + \tan x = t.$ तब $(\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt$

$$\therefore \quad \int \sec x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\sec x + \tan x| + c$$

उदाहरण 30.13. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$$

हल : मान लीजिए $x = a \sin\theta \quad \Rightarrow \quad dx = a\cos\theta \, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a\cos\theta}{a^2 - a^2\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\log|\sec\theta + \tan\theta| + c = \frac{1}{a}\log\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right| + c$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right| + c = \frac{1}{a}\log\left|\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\right| + c = \frac{1}{a}\log\left|\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

उदाहरण 30.14. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$

हल : मान लीजिए कि $x = a\sec\theta \quad \Rightarrow dx = a\sec\theta\tan\theta \, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta \, d\theta}{a^2\sec^2\theta - a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan^2\theta} d\theta \qquad \left(\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{a}\int \operatorname{cosec}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\log|\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + c = \frac{1}{a}\log\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right| + c$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{1-\frac{a}{x}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\right| + c = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\right| + c = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

उदाहरण 30.15. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$

हलः मान लीजिए कि $x = a \tan\theta \Rightarrow dx = a \sec^2\theta \, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{a \sec^2\theta}{a^2\left(1 + \tan^2\theta\right)} d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c \qquad \left(\frac{x}{a} = \tan\theta \Rightarrow \tan^{-1}\frac{x}{a} = \theta\right)$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

उदाहरण 30.16 मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

हल : मान लीजिए कि $x = a \sin\theta$

$\Rightarrow \qquad dx = a \cos\theta \, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}} d\theta$$

$$= \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta} d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

उदाहरण 30.17. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$

हल : मान लीजिए कि $x = a\sec\theta \Rightarrow dx = a\sec\theta\tan\theta \, d\theta$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\sqrt{\sec^2\theta - 1}} d\theta$$

$$= \int \sec\theta d\theta = \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

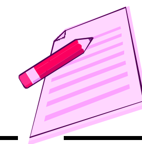
$$= \log\left|\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

उदाहरण 30.18 मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$

हल : मान लीजिए कि $x = a \tan\theta$

$\Rightarrow \qquad dx = a\sec^2\theta \, d\theta$



$\therefore \qquad = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \int \sec\theta\, d\theta$ (जैसा कि उदाहरण 11.17 में)

$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + c = \log\left|\frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{x}{a}\right| + c$$

$$= \log\left|\sqrt{a^2 + x^2} + x\right| + c$$

नोट: उदाहरण संख्या 11.12 से 11.18 के परिणामों को सूत्र के रूप में याद रखिए

उदाहरण 30.19. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\,dx$

हल : क्योंकि x^2 फलन $(x^4 + 1)$ का अवकल नहीं है इसलिए हम दिए गए समाकल को लिख सकते हैं

$$\int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\,dx$$

हम मान लेते हैं कि $\qquad x - \frac{1}{x} = t.$

$\therefore \qquad \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = dt$

तथा $\qquad x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

$\therefore \qquad \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \int \frac{dt}{(t)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

उदाहरण 30.20. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}\,dx$

हल : $\qquad \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}\,dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\,dx$

मान लीजिए कि $\qquad x + \frac{1}{x} = t.$

तब $$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$$

तथा $$x^2+2+\frac{1}{x^2} = t^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2} = t^2-2$$

$$\therefore \quad \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{dt}{t^2-2} = \int \frac{dt}{(t)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + c$$

उदाहरण 30.21. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2}{x^4+1}dx$

हल : हम दिए गए समाकल को हल करने के लिए, इसे उदाहरण 11.19 तथा उदाहरण 11.20 में दिये गये समाकल के रूप में परिवर्तित करेंगे।

$$\int \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{x^2+1}{x^4+1}+\frac{x^2-1}{x^4+1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx \qquad \text{उदाहरण 11.19 तथा 11.20 से}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\right] + c$$

उदाहरण 30.22. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{1}{x^4+1}dx$

हल : हम दिए गए समाकल को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं

$$\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{x^4+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx \qquad \text{उदाहरण 11.21 से}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\right] + c$$

उदाहरण 30.23. मान ज्ञात कीजिए : (a) $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$ (b) $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$

हल : (a) $$\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

(b) $$\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx$$

मान लीजिए कि $\quad x + \frac{1}{x} = t. \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$

तथा $\quad x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 1$

$\therefore$ $$\int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \log\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + c = \frac{1}{2} \log\left|\frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x} + 1}\right| + c$$

उदाहरण 30.24. मान ज्ञात कीजिए : $\int \sqrt{\tan x}\, dx$

हल : मान लीजिए कि $\quad \tan x = t^2 \quad \Rightarrow \quad \sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

$\Rightarrow \quad dx = \frac{2t}{\sec^2 x} dt = \frac{2t}{1 + t^4} dt$

$\therefore$ $$\int \sqrt{\tan x}\, dx = \int t\left(\frac{2t}{1 + t^4}\right) dt = \int \frac{2t^2}{1 + t^4} dt$$

$$= \int \left(\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} + \frac{t^2 - 1}{t^4 + 1}\right) dt = \int \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt + \int \frac{t^2 - 1}{t^4 + 1} dt$$

इसके बाद उदाहरण 30.19 तथा 30.20 की भांति हल कीजिए।

उदाहरण 30.25. मान ज्ञात कीजिए : $\int \sqrt{\cot x}\, dx$

हल : मान लीजिए कि $\quad \cot x = t^2 \quad \Rightarrow \quad -\text{cosec}^2 x\, dx = 2t\, dt$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{-2t}{\operatorname{cosec}^2 x}\,dt = -\frac{2t}{t^4+1}\,dt$$

$$\therefore \qquad \int \sqrt{\cot x}\,dx = -\int t\left(\frac{2t}{t^4+1}\right)dt = -\int \frac{2t^2}{t^4+1}\,dt = -\int\left(\frac{t^2+1}{t^4+1}+\frac{t^2-1}{t^4+1}\right)dt$$

इसके बाद उदाहरण 30.19 तथा 30.20 की भांति हल कीजिए।

उदाहरण 30.26. मान ज्ञात कीजिए : $\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$

हल : मान लीजिए कि $\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x)\,dx = dt$

तथा $1 - 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow 1 - t^2 = 2\sin x\cos x$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1-t^2}{2} = \sin x\cos x$$

अब? $$\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx = \int\left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right)$$

$$\therefore \qquad \int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\cos x\sin x}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{\dfrac{1-t^2}{2}}} = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \sqrt{2}\sin^{-1}[\sin x - \cos x] + c$$

(उदाहरण 30.16 के परिणाम का उपयोग करने पर)

उदाहरण 30.27. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-2x)}}$

हल : (a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{8+3x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(x^2-3x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-\left(x^2-3x+\dfrac{9}{4}\right)+\dfrac{9}{4}}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{41}}{2}\right)^2-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}} = \sin^{-1}\left[\frac{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)}{\dfrac{\sqrt{41}}{2}}\right]+c$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+c$$

(b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-2x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{x}{2}-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{16} - \left[x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \left\{ \frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \right\} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1}(4x - 1) + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.5

1. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \frac{x^2}{x^2 - 9} dx$ (b) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ (c) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$ (e) $\int \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}$ (f) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$

(g) $\int \frac{dx}{3x^2 + 6x + 21}$ (h) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$ (i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 12}}$

(j) $\int \frac{d\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}$ (k) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$ (l) $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\, dx$

(m) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ (n) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{9 - 16x^6}} dx$ (o) $\int \frac{(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

(p) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x^2}}$ (q) $\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}} d\theta$ (r) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x - 4}} dx$

(s) $\int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} dx$ (t) $\int \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 25}} dx$

30.6 खंडश: समाकलन (Integration by Parts)

अवकलन में आपने सीखा है कि

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{d}{dx}(g) + g\frac{d}{dx}(f)$$

या
$$f\frac{d}{dx}(g) = \frac{d}{dx}(fg) - g\frac{d}{dx}(f) \qquad (1)$$

आप यह भी जानते हैं कि $\int \frac{d}{dx}(fg)\, dx = fg$

(1) का समाकलन करने पर हमें प्राप्त हुआ,

$$\int f \frac{d}{dx}(g)\,dx = \int \frac{d}{dx}(fg)\,dx - \int g \frac{d}{dx}(f)\,dx$$

$$= fg - \int g \frac{d}{dx}(f)\,dx \qquad (2)$$

यदि हम लें $\quad f = u(x);\ \frac{d}{dx}(g) = v(x),$

तब (2) बन जाता है, $\int u(x)\,v(x)\,dx$

$$= u(x)\cdot\int v(x)\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(u(x))\int v(x)\,dx\right]dx$$

= प्रथम फलन $\times$ दूसरे फलन का समाकल $-\int$[प्रथम फलन का अवकलन

$\times$ दूसरे फलन का समाकलन] dx

(A) (B)

यहां दो फलनों के गुणन में महत्वपूर्ण भाग है कि प्रथम और द्वितीय फलन का चुनाव कैसे किया जाए क्योंकि इनमें से कोई भी प्रथम अथवा द्वितीय फलन लिया जा सकता है।

इसके लिए उपरोक्त परिणाम का भाग B इसका सूचक होगा। प्रथम फलन ऐसा होना चाहिए कि आगे अवकलनों के उपरान्त या तो वह अगले पद लघुतर या स्थिर पद में परिवर्तित हो जाए।

$x \sin x,\ x\cos^2 x,\ x^2 e^x$ जैसे फलनों के समाकलनों में,

(i) बीजीय फलन को प्रथम फलन लिया जाना चाहिए।

(ii) यदि कोई बीजीय फलन नहीं है तो प्रथम फलन इस प्रकार लिया जाए कि उससे उपरोक्त की भांति 'B' में गुणनफल को सरल बनाया जा सके। प्रथम फलन का चुनाव करने के लिए वरीयता के नीचे दिए गए क्रम का उपयोग किया जा सकता है :

  (i) प्रतिलोम फलन

  (ii) लघुगणकीय फलन

  (iii) त्रिकोणमितीय फलन

  (iv) चरघांताकी फलन

निम्नलिखित उदाहरण प्रथम फलन के चुनाव की अवधारणा का अभ्यास करायेंगें।

		प्रथम फलन	दूसरा फलन
1.	$\int x\cos x\,dx$	x (क्योंकि यह बीजीय है)	$\cos x$
2.	$\int x^2 e^x dx$	x^2 (क्योंकि यह बीजीय है)	e^x
3.	$\int x^2 \log x\ dx$	$\log x$	x^2
4.	$\int \frac{\log x}{(1+x^2)}\,dx$	$\log x$	$\frac{1}{(1+x)^2}$
5.	$\int x\sin^{-1} x\ dx$	$\sin^{-1} x$	x

6.	$\int \log x\, dx$	$\log x$	1 (जब लघुगणकीय या प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अकेले हों तो '1' को दूसरा फलन लिया जाता है।)
7.	$\sin^{-1} x\, dx$	$\sin^{-1} x$	1

उदाहरण 30.28. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int x^2 \sin x\, dx$$

हल : बीजीय फलन x^2 को प्रथम फलन तथा 'sin x' को दूसरा फलन लेने पर हमें प्राप्त हुआ

$$\int \underset{\text{I}}{x^2} \underset{\text{II}}{\sin x}\, dx = x^2 \int \sin x - \int \left[\frac{d}{dx}(x^2) \int \sin x\, dx \right] dx$$

$$= -x^2 \cos x - 2\int x(-\cos x)\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx \qquad (1)$$

तथा $\int x \cos x\, dx = x \sin x + \cos x + c \qquad (2)$

(2) का मान (1) में रखने पर हमें प्राप्त हुआ,

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2[x \sin x + \cos x] + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

उदाहरण 30.29. $\int x^2 \log x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए :

हल : वरीयता के क्रम के अनुसार हम $\log x$ को प्रथम फलन लेते हैं।

$$\therefore \qquad \int \underset{\text{I}}{\log x}\; \underset{\text{II}}{x^2}\, dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\, dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^2}{3}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right) + c = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + c$$

उदाहरण 30.30. $\int \sin^{-1} x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए :

हल : $$\int \sin^{-1} x\, dx = \int \sin^{-1} x \cdot 1 \cdot dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

मान लीजिए कि $\qquad 1 - x^2 = t$

$\Rightarrow \qquad -2x\, dx = dt$

$$\Rightarrow \qquad x\,dx = \frac{-1}{2}\,dt$$

$$\therefore \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\therefore \qquad \int \sin^{-1} x\,dx = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.6

मान ज्ञात कीजिए :

1. (a) $\int x \sin x\,dx$ (b) $\int \left(1+x^2\right)\cos 2x\,dx$ (c) $\int x \sin 2x\,dx$
2. (a) $\int x \tan^2 x\,dx$ (b) $\int x^2 \sin^2 x\,dx$
3. (a) $\int x^3 \log 2x\,dx$ (b) $\left(1-x^2\right)\log x\,dx$ (c) $\int (\log x)^2\,dx$
4. (a) $\int \frac{\log x}{x^n}\,dx$ (b) $\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$
5. (a) $\int x^2 e^{3x}\,dx$ (b) $\int x\,e^{4x}\,dx$
6. $\int x(\log x)^2\,dx$
7. (a) $\int \sec^{-1} x\,dx$ (b) $\int x \cot^{-1} x\,dx$

30.7 $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ के रूप के समाकल

$\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ में f (x) का अवकलज f '(x) है।

समाकलन के ऐसे प्रकारों में खंडशः विधि द्वारा समाकलन करने पर $e^x[f(x)]+c$ हल प्राप्त होता है।

उदाहरण के लिए $\int e^x[\tan x + \log \sec x]\,dx$ पर विचार कीजिए। (1)

मान लीजिए कि $\qquad f(x) = \log \sec x,$

तब $\qquad f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x$

अतः (1) को पुनः इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\int e^x[f'(x)+f(x)]\,dx = e^x[f(x)] + C = e^x \log \sec x + C$$

अन्यथा हम इसे निम्नलिखित प्रकार भी हल कर सकते हैं

$$\int e^x[\tan x + \log \sec x]\,dx = \underset{\text{I}}{\int e^x \tan x\,dx} + \underset{\text{II}}{\int e^x \log \sec x\,dx}$$

$$= e^x \log \sec x - \int e^x \log \sec x \; dx + \int e^x \log \sec x \; dx$$

$$= e^x \log \sec x + c$$

उदाहरण 30.31. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ (b) $\int e^x \left(\frac{1 + x \log x}{x} \right) dx$

(c) $\int \frac{x \; e^x}{(x+1)^2} dx$ (d) $\int e^x \left[\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right] dx$

हल :

(a) $$\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int e^x \left[\frac{1}{x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \right) \right] dx = e^x \left(\frac{1}{x} \right)$$

(b) $$\int e^x \left(\frac{1 + x \log x}{x} \right) dx = \int e^x \left(\frac{1}{x} + \log x \right) dx \int e^x \left(\log x + \frac{d}{dx}(\log x) \right) dx$$

$$= \int e^x \left(f(x) + f'(x) \right) dx = e^x \log x + C$$

(c) $$\int \frac{x \; e^x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2} e^x dx = \int e^x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int e^x \left(\frac{1}{x+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x+1)} \right) \right) dx = e^x \left(\frac{1}{x+1} \right) + c$$

(d) $$\int e^x \left[\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right] dx = \int e^x \left[\frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right] dx$$

$$= \int e^x \left[\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} \right] dx$$

$$= \int e^x \left[\tan \frac{x}{2} + \frac{d}{x}\left(\tan \frac{x}{2} \right) \right] dx \; = e^x \tan \frac{x}{2} + c$$

उदाहरण 30.32. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \sec^3 x \; dx$ (b) $\int e^x \sin x \; dx$

हल : (a) $\int \sec^3 x \; dx$

मान लीजिए कि $I = \int \sec x \cdot \sec^2 x \; dx$

$$= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \tan x \cdot \tan x \; dx$$

$\therefore$ $$I = \sec x \tan x - \int \left(\sec^3 x - \sec x \right) dx \qquad \left(\because \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \right)$$

या $$I = \sec x \tan x - \int \sec^3 x \; dx + \int \sec x \; dx$$

या $\qquad 2I = \sec x \tan x + \int \sec x \; dx$

या $\qquad I = \sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x| + c_1$

या $\qquad I = \frac{1}{2}[\sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x|] + c$

(b) $\qquad \int e^x \sin x \; dx$

मान लीजिए कि $I = \int e^x \sin x \; dx$

$$= e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx$$

$$= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x \; dx\right)$$

$\therefore \qquad I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$

या $\qquad 2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$

या $\qquad I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$

उदाहरण 30.33. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \; dx$$

हल : मान लीजिए कि $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \; dx = \int \sqrt{a^2 - x^2}.1 \, dx$

1 को दूसरा फलन लेकर खंडश विधि द्वारा समाकलन करने पर

$$I = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)x - \int \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x) \cdot x \; dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - \left(a^2 - x^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx - \int \sqrt{a^2 - x^2} \; dx$$

$\therefore \qquad I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - I$

या $\qquad 2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

या $\qquad I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] + c$

इसी प्रकार $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

$\therefore$ $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \log\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + c$

नोट: उदाहरण संख्या 30.33 के परिणामों को सूत्र के रूप में याद रखिए।

उदाहरण 30.34. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int \sqrt{16x^2 + 25}\, dx$ (b) $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$ (c) $\int \sqrt{1 + x - 2x^2}\, dx$

हल :

(a) $\int \sqrt{16x^2 + 25}\, dx = 4\int \sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}\, dx = 4\int \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2}\, dx$

$\int \sqrt{\left(x^2 + a^2\right)}\, dx$ के सूत्र का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\int \sqrt{16x^2 + 25}\, dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \frac{25}{16}} + \frac{25}{32}\log\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{25}{16}}\right|\right] + c$$

$$= \frac{x}{8}\sqrt{16x^2 + 25} + \frac{25}{8}\log\left|4x + \sqrt{16x^2 + 25}\right| + c$$

(b) $\int \sqrt{\left(a^2 - x^2\right)}\, dx$ के सूत्र का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = \int \sqrt{(4)^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4} + c$$

(c) $\int \sqrt{1 + x - 2x^2}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - x^2}\, dx$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\left[\frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16}\right]}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{x - \frac{1}{4}}{2}\sqrt{\frac{9}{16} - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{9}{16 \times 2}\sin^{-1}\frac{x - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right] + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.7

मान ज्ञात कीजिए :

1. (a) $\int e^x \sec x [1 + \tan x] dx$ (b) $\int e^x [\sec x + \log|\sec x + \tan x|] dx$

2. (a) $\int \frac{x-1}{x^2} e^x dx$ (b) $\int e^x \left(\sin^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

3. $\int e^x \frac{(x-1)}{(x+1)^3} dx$ 4. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

5. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$ 6. $\int e^x \sin 2x \ dx$

30.8 आंशिक भिन्नों का उपयोग करके समाकलन करना

अभी तक आप समाकलन की विभिन्न विधियां सीख चुके हैं।

परन्तु फिर भी $\frac{4x+5}{x^2+x-6}$ की तरह की स्थिति हो सकती है जबकि प्रतिस्थापन या खंडशः विधि अधिक सहायक नहीं है। ऐसी स्थिति में हम एक दूसरी तकनीक जिसे आंशिक भिन्नों के उपयोग से समाकलन की तकनीक कहा जाता है, की सहायता लेते हैं।

किसी भी उचित परिमेय भिन्न $\frac{p(x)}{q(x)}$ को ऐसी परिमेय भिन्नों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक का हर $q(x)$ का एक सरल गुणनखंड हो। इस प्रकार की प्रत्येक भिन्न को आंशिक भिन्न कहते हैं तथा इस प्रक्रिया को वियोजन या दी गई भिन्न को आंशिक भिन्नों में विभक्त करना कहते हैं।

उदाहरण के लिए, $\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-1} = \frac{8x+7}{(x+2)(x-1)} = \frac{8x+7}{x^2+x-2}$

यहाँ $\frac{3}{x+2}$ तथा $\frac{5}{x-1}$, $\frac{8x+7}{x^2+x-2}$ की आंशिक भिन्न कहलाती हैं।

यदि $\frac{f(x)}{g(x)}$ एक उचित भिन्न है, तथा $g(x)$ का वास्तविक गुणनखंड़ों में विभक्त किया जा सकता है, तब

(a) प्रत्येक अनावर्ती रैखिक गुणनखंड $(ax+b)$ के संगत एक $\frac{A}{ax+b}$ के रूप वाली आंशिक भिन्न होती है।

(b) $(ax+b)^2$ के लिए दो आंशिक भिन्नों का योग लिया जाता है।

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}$$

$(ax+b)^3$ के लिए तीन आंशिक भिन्न होती हैं।

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3} \text{ आदि}$$

(c) किसी अगुणनखंडीय द्विघात व्यंजक ax^2+bx+c के लिए एक आंशिक भिन्न $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ होती है।

इसलिए यदि किसी उचित भिन्न $\frac{f(x)}{g(x)}$ में g (x) का वास्तविक गुणनखंडों में विभक्त किया जा सकता हो, तो $\frac{f(x)}{g(x)}$ को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

हर के गुणनखंड	संगत आंशिक भिन्न
$(ax+b)(x+d)$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$
$(ax+b)^2$	$\frac{A}{(ax+b)}+\frac{B}{(ax+b)^2}$
$(ax+b)^3$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$\left(ax^2+bx+c\right)^2$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$

जबकि A,B,C तथा D स्वेच्छ अचर है।

उदाहरण 30.35. $\int \frac{2x+5}{x^2-x-2}dx$ का मान ज्ञात कीजिए :

हल : $$\frac{2x+5}{x^2-x-2}=\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}$$

मान लीजिए कि $$\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \qquad (1)$$

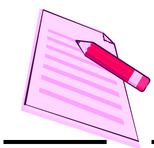
हमें प्राप्त होता है :

$$2x+5=A(x+1)+B(x-2)$$

$x=2$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $9=3A$ या $A=3$

$x=-1$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $3=-3B$ या $B=-1$

इन मानों को (1) में रखने पर हमें मिलता है :



$$\frac{2x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{2x+5}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 3\log|x-2| - \log|x+1| + c$$

उदाहरण 30.36. $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-1}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए :

हल : मान लीजिए कि $\qquad I = \int \frac{x^3+x+1}{x^2-1}\,dx$

अब $\qquad \frac{x^3+x+1}{x^2-1} = x + \frac{2x+1}{x^2-1} = x + \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)}$

$$\therefore \qquad I = \int \left(x + \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} \right) dx \qquad (1)$$

मान लीजिए कि $\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ $\qquad (2)$

$$\Rightarrow \qquad 2x+1 = A(x-1) + B(x+1)$$

$x = 1$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $\qquad B = \frac{3}{2}$

$x = -1$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $\qquad A = \frac{1}{2}$

A और B के इन मानों को (2) में रखने पर तथा समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-1| \qquad (3)$$

(1) और (3) से हमें प्राप्त होता है :

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-1| + C$$

उदाहरण 30.37. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{8}{(x+2)(x^2+4)}\,dx$$

हल : मान लीजिए कि $\frac{8}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ $\quad (\because x^2+4$ अवियोज्य है)

दोनों पक्षों को $(x+2)(x^2+4)$ से गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$8 = A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)$$

x की घातांको के संगत गुणाकों की दोनों पक्षों में तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A+B \\ 0 &= 2B+C \\ 8 &= 4A+2C \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 1, B = -1, C = 2$$

$$\therefore \quad \int \frac{8}{(x+2)\left(x^2+4\right)}dx = \int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{x-2}{x^2-4}dx$$

$$= \int \frac{1}{x+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 2\int \frac{dx}{x^4+4}$$

$$= \log|x+2| - \frac{1}{2}\log\left|x^2+4\right| + 2\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= \log|x+2| - \frac{1}{2}\log\left|x^2+4\right| + \tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

उदाहरण 30.38. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2\sin 2\theta - \cos\theta}{4-\cos^2\theta - 4\sin\theta}\, d\theta$$

हल : मान लीजिए कि $I = \int \frac{2\sin 2\theta - \cos\theta}{4-\cos^2\theta - 4\sin\theta}\, d\theta$

$$= \int \frac{(4\sin\theta - 1)\cos\theta d\theta}{3+\sin^2\theta - 4\sin\theta}$$

मान लीजिए कि $\sin\theta = t$, तब $\cos\theta\, d\theta = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{4t-1}{3+t^2-4t}dt$$

मान लीजिए कि $\frac{4t-1}{3-t^2-4t} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-1}$

तब $4t-1 = A(t-1)+B(t-3)$

$t = 1$ रखने पर $B = -\frac{3}{2}$

$t = 3$ रखने पर $A = \frac{11}{2}$

$$\therefore \quad I = \frac{11}{2}\int\left(\frac{1}{t-3}\right)dt - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t-1} = \frac{11}{2}\log|t-3| - \frac{3}{2}\log|t-1| + c$$

$$= \frac{11}{2}\log|\sin\theta - 3| - \frac{3}{2}\log|\sin\theta - 1| + c$$

देखें आपने कितना सीखा 30.8

निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

1. (a) $\int \sqrt{4x^2 - 5}\ dx$ (b) $\int \sqrt{x^2 + 3x}\ dx$ (c) $\sqrt{3 - 2x - 2x^2}\ dx$

2. (a) $\int \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}\ dx$ (b) $\int \frac{x}{x^2 - 16}\ dx$

3. (a) $\int \frac{x^3}{x^2 - 4}\ dx$ (b) $\int \frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)^2 (x+2)}\ dx$

4. $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3}\ dx$

5. (a) $\int \frac{\sin x}{\sin 4x}\ dx$ (b) $\int \frac{1 - \cos x}{\cos x (1 + \cos x)}\ dx$

आइये दोहराएँ

- समाकलन, अवकलन की प्रतिलोम क्रिया है
- अनिश्चित समाकलों के कुछ मानक रूप :

(a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

(b) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c$

(c) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

(d) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(e) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(f) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

(g) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

(h) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

(j) $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

(k) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx = \sec^{-1} x + c$

(l) $\int e^x dx \quad = e^x + c$

(m) $\int a^x dx \quad = \frac{a^x}{\log a} + c \left(a > 0 \text{ and } a \neq 1\right)$

- **अनिश्चित समाकलों के गुणधर्म :**

  (a) $\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx \quad = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

  (b) $\int k f(x) dx \quad = k \int f(x) dx$

- (i) $\int (ax+b)^n dx \quad = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c, \ (n \neq -1)$

  (ii) $\int \frac{1}{ax+b} dx \quad = \frac{1}{a} \log|ax+b| + c$

  (iii) $\int \sin(ax+b) dx \quad = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + c$

  (iv) $\int \cos(ax+b) dx \quad = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$

  (v) $\int \sec^2(ax+b) dx \quad = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$

  (vi) $\int \operatorname{cosec}^2(ax+b) dx \quad = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

  (vii) $\int \sec(ax+b) \tan(ax+b) dx \quad = \frac{1}{a} \sec(ax+b) + c$

  (viii) $\int \operatorname{cosec}(ax+b) \cot(ax+b) dx \quad = -\frac{1}{a} \operatorname{cosec}(ax+b) + c$

  (ix) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

  (x) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \quad = \log|f(x)| + c$

- (i) $\int \tan x \, dx \quad = -\log|\cos x| + c \ = \log|\sec x| + c$

  (ii) $\int \cot x \, dx \quad = \log|\sin x| + c$

  (iii) $\int \sec x \, dx \quad = \log|\sec x + \tan x| + c$

  (iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx \quad = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$

- (i) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$ (ii) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

  (iii) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$ (iv) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

- दो फलनों के गुणनफल का समाकल

  $=$ I फलन $\times$ II फलन का समाकल $-$

  $$\int [\text{I फलन का अवकलन} \times \text{II फलन का समाकल}]\, dx$$

- $\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx = e^x f(x)+c$

- $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]+c$

  $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

  $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+c$

- परिमेय भिन्न निम्नलिखित दो प्रकार की होती है:

  (i) उचित भिन्न जबकि अंश में चरांक की घातϕ हर में चरांक की घात से कम होती है।

  (ii) अनुचित भिन्न जबकि अंश में चरांक की घात $\geq$ हर में चरांक की घात के बराबर या उससे अधिक होती है।

- एक उचित भिन्न $\frac{f(x)}{g(x)}$ में यदि $g(x)$ को वास्तविक गुणनखंडों में विभक्त किया जा सकता हो, तो $\frac{f(x)}{g(x)}$ को निम्नलिखित रूप से लिखा जा सकता है:

हर के गुणनखंड	संगत आंशिक भिन्न
$(ax+b)(cx+d)$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$
$(ax+b)^2$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}$
$(ax+b)^3$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}$
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^2$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}$

जबकि A, B, C, D स्वेच्छ अचर हैं।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/12methods/04integration/index.shtml*
- *http://en.wiktionary.org/wiki/integration*
- *http://www.sosmath.com/calculus/integration/byparts/byparts....*

आइए अभ्यास करें

निम्नलिखित फलनों के x के सापेक्ष समाकलन कीजिए :

1. $\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$
2. $\sqrt{1+\sin 2x}$
3. $\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}$
4. $(\tan x-\cot x)^2$
5. $\dfrac{4}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\dfrac{2\sin^2 x}{1+\cos 2x}$
7. $\dfrac{2\cos^2 x}{1-\cos 2x}$
8. $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$
9. $\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$
10. $\cos(7x-\pi)$
11. $\sin(3x+4)$
12. $\sec^2(2x+b)$
13. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x-\cos x}$
14. $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}dx$
15. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{cosec} x}{\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)}dx$
16. $\displaystyle\int\frac{\cot x}{3+4\log\sin x}dx$
17. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin 2x\log\tan x}$
18. $\displaystyle\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx$
19. $\displaystyle\int\sec^4 x\tan x\,dx$
20. $\displaystyle\int e^x\sin e^x dx$
21. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$
22. $\displaystyle\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx$
23. $\displaystyle\int\sqrt{25-9x^2}\,dx$
24. $\displaystyle\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx$

25. $\int \sqrt{3x^2+4}\,dx$

26. $\int \sqrt{1+9x^2}\,dx$

27. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

28. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$

29. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

30. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$

31. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$

32. $\int \frac{x^2}{x^2-a^2}dx$

33. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^4}}$

34. $\int \frac{\sin x}{\sin 3x}dx$

35. $\int \frac{dx}{1-4\cos^2 x}$

36. $\int \sec^2(ax+b)\,dx$

37. $\int \frac{dx}{x(2+\log x)}$

38. $\int \frac{x^5}{1+x^6}dx$

39. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}dx$

40. $\int \frac{\cot x}{\log \sin x}dx$

41. $\int \frac{\sec^2 x}{a+b\tan x}dx$

42. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

43. $\int \cos^2 x\,dx$

44. $\int \sin^3 x\,dx$

45. $\int \sin 5x \sin 3x\;dx$

46. $\int \sin^2 x \cos^3 x\;dx$

47. $\int \sin^4 x\,dx$

48. $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

49. $\int \tan^3 x\;dx$

50. $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x}\,dx$

51. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cot x}\,dx$

52. $\int \frac{1+x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x+2x}\,dx$

53. $\int \frac{\sec\theta \operatorname{cosec}\theta\; d\theta}{\log\tan\theta}$

54. $\int \frac{\cot\theta\; d\theta}{\log\sin\theta}$

55. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$

56. $\int \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\,d\theta$

57. $\int \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$

58. $\int \frac{\sin x \cos x\;dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$

59. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

60. $\int e^x \left(\cos^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

61. $\int e^x \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \right) dx$

62. $\int \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\, dx$

63. $\int \cos \left[2 \cot^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right] dx$

64. $\int \frac{\sin^{-1} x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

65. $\int \sqrt{x} \log x \, dx$

66. $\int e^x (1+x) \log \left(xe^x \right) dx$

67. $\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$

68. $\int e^x \sin^2 x \, dx$

69. $\int \cos(\log x)\, dx$

70. $\int \log(x+1)\, dx$

71. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2 (x+3)} dx$

72. $\int \frac{\sin\theta \cos\theta}{\cos^2\theta - \cos\theta - 2} d\theta$

73. $\int \frac{dx}{x\left(x^5+1\right)}$

74. $\int \frac{x^2+1}{\left(x^2+2\right)\left(2x^2+1\right)} dx$

75. $\int \frac{\log x}{x(1+\log x)(2+\log x)} dx$

76. $\int \frac{dx}{1-e^x}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 30.1

1. $\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 1,\ \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2,\ \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 3,\ \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 4,\ \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 5$

2. (a) $\frac{x^6}{6} + c$ (b) $\sin x + c$ (c) 0

3. (a) $\frac{x^7}{7} + c$ (b) $\frac{1}{6x^6} + c$ (c) $\log|x| + c$

(d) $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\log\left(\frac{3}{5}\right)} + c$ (e) $\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c$ (f) $\frac{-1}{8x^8} + c$

(g) $2\sqrt{x} + c$ (h) $9x^{\frac{1}{9}} + c$

4. (a) $-\operatorname{cosec}\theta + c$ (b) $\sec\theta + c$

(c) $\tan\theta + c$ (d) $-\cot\theta + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.2

1. (a) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + c$ (b) $-x + \tan^{-1}x + c$

(c) $x^{10} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + c$ (d) $-\frac{1}{x^5} - \frac{3}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} + \frac{7}{x} - 8x + c$

(e) $\frac{x^3}{3} - x - \tan^{-1}x + c$ (f) $\frac{x^2}{2} + 4x + 4\log x + c$

2. (a) $\frac{1}{2}\tan x + c$ (b) $\tan x - x + c$

(c) $-2\operatorname{cosec} x + c$ (d) $-\frac{1}{2}\cot x + c$

(e) $-\sec x + c$ (f) $-\cot x + \operatorname{cosec} x + c$

3. (a) $\sqrt{2}\sin x + c$ (b) $-\sqrt{2}\cos x + c$

(c) $-\frac{1}{2}\cot x + c$

4. (a) $\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.3

1. (a) $\frac{1}{5}\cos(4-5x) + c$ (b) $\frac{1}{3}\tan(2+3x) + c$

(c) $\log\left|\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

(d) $\frac{1}{4}\sin(4x+5) + c$

(e) $\frac{1}{3}\sec(3x+5) + c$ (f) $-\frac{1}{5}\operatorname{cosec}(3+5x) + c$

2. (a) $\frac{1}{12(3-4x)^3} + c$ (b) $\frac{1}{5}(x+1)^5 + c$

(c) $-\frac{1}{77}(4-7x)^{11} + c$ (d) $\frac{1}{16}(4x-5)^4 + c$

(e) $\frac{1}{3}\log|3x-5| + c$ (f) $-\frac{2}{9}\sqrt{5-9x} + c$

(g) $\frac{1}{6}(2x+1)^3 + c$ (h) $\log|x+1| + c$

3. (a) $\frac{1}{2}e^{2x+1} + c$ (b) $-\frac{1}{8}e^{3-8x} + c$

(c) $-\frac{1}{4e^{(7+4x)}} + c$

4. (a) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$ (b) $\frac{1}{32}\left(-\frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos 6x\right) + c$

(c) $\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 7x}{7} - \cos x\right] + c$ (d) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2}\right] + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.4

1. (a) $\frac{1}{6}\log\left|3x^2 - 2\right| + c$ (b) $\log\left|x^2 + x + 1\right| + c$

(c) $\log\left|x^2 + 9x + 30\right| + c$ (d) $\frac{1}{3}\log\left|x^3 + 3x + 3\right| + c$

(e) $\log\left|x^2 + x - 5\right| + c$ (f) $2\log\left|5 + \sqrt{x}\right| + c$

(g) $\log|8 + \log x| + c$

2. (a) $\frac{1}{b}\log\left|a + be^x\right| + c$ (b) $\tan^{-1}\left(e^x\right) + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.5

1. (a) $x + \frac{3}{2}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$ (b) $\tan^{-1}\left(e^x\right) + c$

(c) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(x^2\right) + c$ (d) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right) + c$

(e) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan x) + c$ (f) $\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

(g) $\frac{1}{3\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + c$ (h) $\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$

(i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\sec^{-1}\frac{x}{2} + c$ (j) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan^2\theta - 1}{\sqrt{2}\tan\theta}\right) + c$

(k) $\log\left|e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right| + c$ (l) $\sin^{-1}x - \sqrt{1 - x^2} + c$

(m) $\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + c$ (n) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{4}{3}x^3\right) + c$

(o) $\sqrt{x^2+1} + \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$ (p) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{2x + \sqrt{9+4x^2}}{2}\right| + c$

(q) $-\frac{1}{2}\log\left|2\cos\theta + \sqrt{4\cos^2\theta - 1}\right| + c$

(r) $\log\left|\tan x + \sqrt{\tan^2 x - 4}\right| + c$

(s) $\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{1}\right) + c$ (t) $\frac{1}{4}\log\left|x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2}\right| + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.6

1. (a) $-x\cos x + \sin x + c$

   (b) $\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\sin 2x + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$

   (c) $\frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c$

2. (a) $x\tan x - \log|\sec x| - x + c$

   (b) $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + c$

3. (a) $\frac{x^4\log 2x}{4} - \frac{x^4}{16} + c$ (b) $\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\log x - x + \frac{x^3}{9} + c$

   (c) $x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + c$

4. (a) $\frac{x^{1-n}}{1-n}\log x - \frac{x^{1-n}}{(1-n)^2} + c$ (b) $\log x.\left[\log(\log x) - 1\right] + c$

5. (a) $e^{3x}\left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right] + c$ (b) $x\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + c$

6. $\frac{x^2}{2}\left[(\log x)^2 - \log x + \frac{1}{2}\right] + c$

7. (a) $x\sec^{-1}x - \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$

   (b) $\frac{x^2}{2}\cot^{-1}x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cot^{-1}x + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.7

1. (a) $e^x \sec x + c$ (b) $e^x \log|\sec x + \tan x| + c$

2. (a) $\frac{1}{x}e^x + c$ (b) $e^x \sin^{-1} x + c$

3. $\frac{e^x}{(1+x)^2} + c$

4. $\frac{e^x}{1+x} + c$

5. $x \tan\frac{x}{2} + c$

6. $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + c$

देखें आपने कितना सीखा 30.8

1. (a) $x\sqrt{x^2 - \frac{5}{4}} - \frac{5}{4}\log\left|x + \sqrt{x^2 - \frac{5}{4}}\right| + c$

   (b) $\frac{(2x+3)}{4}\sqrt{x^2 + 3x} - \frac{9}{8}\log\left|\left(x + \frac{3}{2}\right) + \sqrt{x^2 + 3x}\right| + c$

   (c) $\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{3 - 2x - 2x^2} + \frac{7}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + c$

2. (a) $4\log|x-3| - 3\log|x-2| + c$

   (b) $\frac{1}{2}\log|x-4| + \log|x+4| + c$

3. (a) $\frac{x^2}{2} - 2[\log|x-2| + \log|x+2|] + c$

   (b) $\frac{11}{9}\log|x-1| + \frac{7}{9}\log(x+2) - \frac{4}{3(x-1)} + c$

4. $\log|x-1| - \frac{3}{(x-1)} - \frac{3}{2(x-1)^2} + c$

5. (a) $\frac{1}{8}\log|1 - \sin x| - \frac{1}{8}|1 + \sin x|$

   $-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|1 - \sqrt{2}\sin x\right| + \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|1 + \sqrt{2}\sin x\right| + c$

   (b) $\log|\sec x + \tan x| - 2\tan\frac{x}{2} + c$

आइए अभ्यास करें

1. $\sec x - \operatorname{cosec} x + c$

2. $\sin x - \cos x + c$

3. $-\cot x - \tan x + c$

4. $\tan x - \cot x - 4x + c$

5. $4\tan^{-1}x - \sin^{-1}x + c$

6. $\tan x - x + c$

7. $-\cot x - x + c$

8. $x - \cos x + c$

9. $x + \cos x + c$

10. $\dfrac{\sin(7x-\pi)}{7} + c$

11. $\dfrac{-\cos(3x+4)}{3} + c$

12. $\dfrac{\tan(2x+b)}{2} + c$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\operatorname{cosec}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c$

14. $\log\left|\tan^{-1}x\right| + c$

15. $\log\left|\log\tan\dfrac{x}{2}\right| + c$

16. $\dfrac{1}{4}\log\left|3 + 4\log\sin x\right| + c$

17. $\dfrac{1}{2}\log\left|\log\tan x\right| + c$

18. $2\log\left|e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}\right| + c$

19. $\dfrac{1}{4}\sec^4 x + c$

20. $-\cos e^x + c$

21. $\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{2} + c$

22. $2\sqrt{\tan x} + c$

23. $\dfrac{1}{6}x\sqrt{\left(25-9x^2\right)} + \dfrac{25}{6}\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}x\right) + c$

24. $\dfrac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax-x^2} + \dfrac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\dfrac{x-a}{a}\right) + c$

25. $\dfrac{x\sqrt{3x^2+4}}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\log\left|\dfrac{\sqrt{3}x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right| + c$

26. $\dfrac{x\sqrt{9x^2+1}}{2} + \dfrac{1}{6}\log\left|3x + \sqrt{1+9x^2}\right| + c$

27. $\left[\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} + \dfrac{1}{2}a^2\log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right|\right] + c$

28. $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{\tan x}{2}\right) + c$

29. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\dfrac{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right] + c$

30. $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-3}{2}\right) + c$

31. $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(2\tan x) + c$

32. $x+\frac{a}{2}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

33. $\frac{1}{12}\log\left|\frac{\sqrt{9+x^4}-3}{\sqrt{9+x^4}+3}\right|+c$

34. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3}+\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}\right|+c$

35. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\tan x-\sqrt{2}}{\tan x+\sqrt{2}}\right|+c$

36. $\frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$

37. $\log\left|(2+\log x)\right|+c$

38. $\frac{1}{6}\log(1+x^6)+c$

39. $\log\left|\sin x+\cos x\right|+c$

40. $\log\left|\log(\sin x)\right|+C$

41. $\frac{1}{b}\log\left|a+b\tan x\right|+c$

42. $-\log\left|1+\cos x\right|+c$

43. $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}x+c$

44. $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c$

45. $\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin 8x}{8}+c$

46. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{\sin^5 x}{5}+c$

47. $\frac{1}{32}[12x-8\sin 2x+\sin 4x]+c$

48. $\tan x-\sec x+c$

49. $\frac{\tan^2 x}{2}+\log\left|\cos x\right|+c$

50. $\frac{-1}{\cos x+\sin x}+c$

51. $\log\left|\frac{1}{1+\cot x}\right|+c$

52. $\frac{1}{2}\log\left|x^2+\sin 2x+2x\right|+c$

53. $\log\left|\tan\theta\right|+c$

54. $\log\left|\log\sin\theta\right|+c$

55. $\frac{1}{2}\tan^{-1}2x$

56. $\log\left|\cos\theta+\sin\theta\right|+c$

57. $e^{-\frac{1}{x}}+c$

58. $\frac{1}{2(a^2-b^2)}\log\left|a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right|+c$

59. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$

60. $e^x\cos^{-1}x+c$

61. $e^x\sec x+c$

62. $\frac{1}{4}x^2+c$

63. $-\frac{1}{2}x^2+c$

64. $\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\log\left|1-x^2\right|+c$

65. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\log x-\frac{2}{3}\right)+c$

66. $xe^x\left[\log\left(xe^x\right)-1\right]+c$

67. $-\frac{1}{1+x}\log|x|+\log|x|-\log|x+1|+c$

68. $\frac{1}{2}e^x-\frac{e^x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+c$

69. $\frac{x}{2}\left[\cos(\log x)+\sin(\log x)\right]+c$

70. $x\log|x+1|-x+\log|x+1|+c$

71. $\frac{3}{8}\log|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{8}\log|x+3|+c$

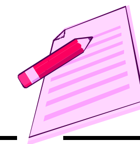
72. $-\frac{2}{3}\log|\cos\theta-2|-\frac{1}{3}\log|\cos\theta+1|+c$

73. $\frac{1}{5}\log\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right|+c$

74. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)\right]+c$

75. $\log\left|\frac{(2+\log x)^2}{1+\log x}\right|+c$

76. $\log\left|\frac{e^x}{1-e^x}\right|+c$



31

निश्चित समाकलन

हमने पिछले पाठ में प्रतिअवकलज अर्थात् फलन के समाकलन की चर्चा की है।

वास्तव में, समाकलन शब्द का अर्थ है: परिणामों के कुछ प्रकार के संकलन (योग) अथवा संयोजन। अब प्रश्न उठता है कि हम गणित की इस शाखा को क्यों पढ़ते हैं? वास्तव में, समाकलन वह है जिसकी सहायता से वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफलों को ज्ञात किया जाता है, जब इसकी निश्चित सीमाएँ ज्ञात है। आगे हम देखेंगे कि इस शाखा का अनुप्रयोग, सांख्यिकी, भौतिकी, जीव विज्ञान, वाणिज्य तथा अन्य विषयों के विभिन्न प्रश्नों में भी किया जाता है।

इस पाठ में, हम निश्चित समाकल की ज्यामितीय परिभाषा देंगे तथा इसकी व्याख्या करेंगे, उपयुक्त गुणों के प्रयोग द्वारा निश्चित समाकलों का मान ज्ञात करेंगे तथा एक परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने में निश्चित समाकलों का प्रयोग करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल को परिभाषित करना तथा इसकी ज्यामितीय व्याख्या करना
- ऊपर दी गई परिभाषा को प्रयोग करते हुए, दिए गए निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना
- समाकल गणित की मूलभूत प्रमेय का कथन देना
- निश्चित समाकलों का मान ज्ञात करने के लिए, निम्नलिखित गुणों के कथन देना तथा उनका प्रयोग करना:

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (ii) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

(iii) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ यदि $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$ यदि $f(2a-x) = -f(x)$

(vii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि 'f', x का एक सम फलन है

$= 0$, यदि f, x का एक विषम फलन है

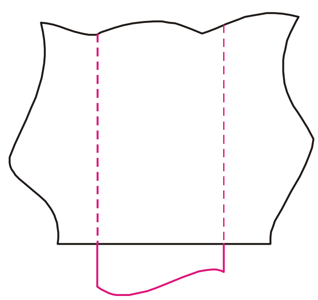
- परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने में, निश्चित समाकलों का प्रयोग करना।

पूर्व ज्ञान

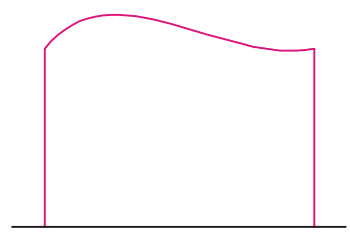
- समाकलन का ज्ञान
- परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

31.1 योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

इस अनुच्छेद में, हम ऐसे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालने की चर्चा करेंगे, जिसकी सीमा की जानकारी हमें नहीं है (चित्र 31.1 देखिए)



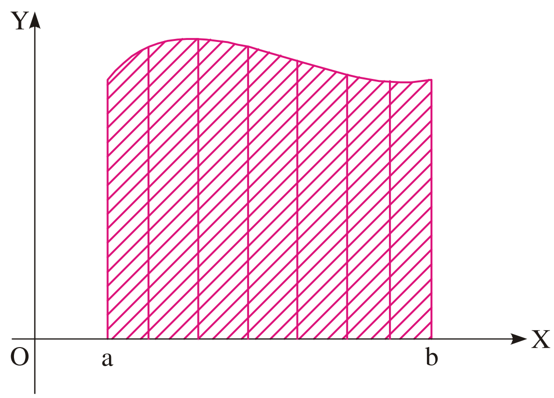
चित्र 31.1



चित्र 31.2

आइए, हम अपने ध्यान को ऐसे क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने तक ही सीमित करें, जहां सीमा, जिसकी जानकारी हमें नहीं है, x-अक्ष के केवल एक पक्ष में (जैसा चित्र 31.2 में) है। यह इसलिए है, क्योंकि हम आशा करते हैं कि यह संभव है कि किसी क्षेत्र को उसी की तरह के छोटे-छोटे उपक्षेत्रों में बाँट कर इनके क्षेत्रफल ज्ञात करके, अन्त में इन्हें जोड़ा जाए, तो पूरा क्षेत्रफल ज्ञात हो जाएगा (चित्र 31.1 देखिए)। अब, माना बन्द अंतराल [a, b] में, एक सतत फलन $f(x)$ परिभाषित है।

अभी यह मान कर चलें कि $f(x)$ द्वारा लिए गए सभी मान ऋणेतर हैं, जिससे कि फलन का आलेख x-अक्ष के ऊपर की वक्र है (चित्र 31.3 देखिए)।



चित्र 31.3

इस वक्र, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ के बीच के क्षेत्र, पर अर्थात् (चित्र 31.3 में) छायांकित क्षेत्र। अब प्रश्न है छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात किया जाए।

इस प्रश्न को हल करने के लिए, हम तीन विशिष्ट स्थितियों, आयताकार क्षेत्र, त्रिभुजाकार क्षेत्र तथा समलंबीय क्षेत्र पर विचार करते हैं।

इन क्षेत्रों का क्षेत्रफल = आधार × औसत ऊँचाई

व्यापक रूप में, अंतराल $[a, b]$ पर किसी फलन $f(x)$ के लिए,

परिबद्ध क्षेत्र (चित्र 31.3 में छायांकित क्षेत्र) का क्षेत्रफल = आधार × औसत ऊँचाई

प्राँत अन्तराल $[a, b]$ की लम्बाई आधार है, किसी बिन्दु x पर $f(x)$ का मान उस बिन्दु की ऊँचाई है। अतः अन्तराल $[a,b]$ में f द्वारा लिए गए मानों का औसत ही औसत ऊँचाई होती है(इसे ज्ञात करना इतना आसान नहीं है, क्योंकि ऊँचाई एकसमान रूप से नहीं बदलती) हमारी समस्या है कि अंतराल $[a,b]$ में f का औसत मान कैसे ज्ञात करें।

यदि अंतराल $[a,b]$ में f के मानों की संख्या परिमित हो, तो हम आसानी से औसत मान निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर लेते हैं :

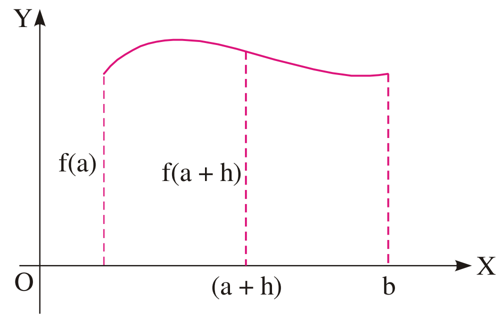
$$\text{अंतराल } [a,b] \text{ में } f \text{ का औसत मान} = \frac{[a,b] \text{ में } f \text{ के मानों का योग}}{\text{मानों की संख्या}}$$

परन्तु हमारे प्रश्न में, अन्तराल $[a, b]$ में f द्वारा लिए गए मानों की संख्या अपरिमित है। ऐसी स्थिति में औसत कैसे ज्ञात किया जाए? उपरोक्त सूत्र हमारी सहायता नहीं करता। अतः, हमें f के औसत मान का आकलन करने के लिए, निम्न विधि का आश्रय लेना पड़ता है :

प्रथम आकलनः केवल a पर f का मान लीजिए। a पर f का मान $f(a)$ है। हम इस मान, अर्थात् $f(a)$, को अन्तराल $[a,b]$ में f का एक रफ (rough) औसत मान आंकते हैं।

$$\text{अंतराल } [a, b] \text{ में } f \text{ का औसत मान (प्रथम आकलन)} = f(a) \qquad \text{(i)}$$

द्वितीय आकलन : $[a, b]$ को दो बराबर भागों, अर्थात् उपअंतरालों में बाँटिए। यदि प्रत्येक उपअंतराल की लम्बाई h है, तो $h = \dfrac{b-a}{2}$ है। उपअंतरालों के बायें सिरों के बिन्दुओं पर f के मानों को लीजिए। ये मान $f(a)$ तथा $f(a+h)$ हैं (चित्र 31.4)।



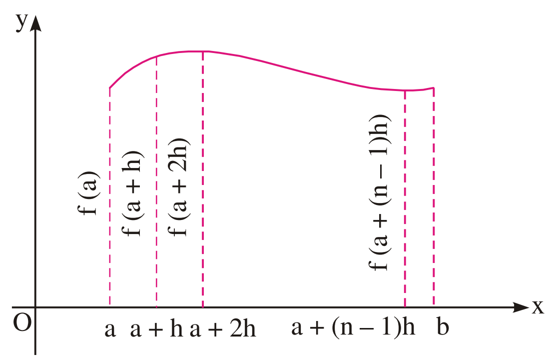
चित्र 31.4

[a, b] में f का औसत इन दोनों मानों का औसत लीजिए।

[a, b] में f का औसत मान (द्वितीय आकलन)

$$= \frac{f(a) + f(a+h)}{2}, \quad h = \frac{b-a}{2} \tag{ii}$$

आशा की जाती है कि यह आकलन, प्रथम आकलन से अच्छा है। इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए, अंतराल [a,b] को h लम्बाई के n उपअंतरालों में बाँटिए (चित्र 31.5), $h = \dfrac{b-a}{n}$ ।



चित्र 31.5

n उपअंतरालों के बाएं सिरे के बिन्दुओं पर f के मान लीजिए। ये मान $f(a)$, $f(a+h)$,......., $f[a+(n-1)h]$ हैं। $[a, b]$ में f के इन n मानों का औसत लीजिए।

[a, b] में f का औसत मान (n वां आकलन)

$$= \frac{f(a) + f(a+h) + ... + f[a+(n-1)h]}{n}, \quad h = \frac{b-a}{n} \tag{iii}$$

n के बड़े मानों के लिए आशा की जाती है कि (iii) अधिक अच्छा आकलन है, जो हम [a, b] में f के औसत मान के लिए ढूंढ़ते हैं।

इस प्रकार, [a, b] में f के औसत मान के लिए, आकलनों का हम निम्न अनुक्रम पाते हैं :

$f(a)$

$\frac{1}{2}[f(a)+f(a+h)], \qquad h=\frac{b-a}{2}$

$\frac{1}{3}[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)], \qquad h=\frac{b-a}{3}$

....

....

$\frac{1}{n}\{f(a)+f(a+h)+........+f[a+(n-1)h]\}, \ h=\frac{b-a}{n}$

जैसे-जैसे हम इस अनुक्रम के अनुदिश आगे बढ़ते हैं, वैसे-वैसे हम अपने परिणाम अर्थात् [a, b] में f द्वारा लिये गये औसत मान के निकट और अधिक निकट पहुंचते जा रहे हैं, । अतः यह तर्कसंगत है कि इन आकलनों की सीमा को [a, b] में f का औसत मान समझा जाए। दूसरे शब्दों में,

[a, b] में, f का औसत मान

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+......+f[a+(n-1)h]\},$$

$$\text{जबकि} \quad h=\frac{b-a}{n} \qquad \text{(iv)}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\{f(a)+f(a+h)+....+f[a+(n-1)h]\},$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि बन्द अंतराल [a, b] पर सभी सतत फलनों के लिए इस सीमा का अस्तित्व होता है।

अब हमारे पास चित्र 31.3 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र है। आधार (b–a) है और औसत ऊँचाई (iv) से प्राप्त है। वक्र $f(x)$, x- अक्ष, कोटियों $x=a$ तथा $x=b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

$$=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+......+f[a+(n-1)h]\},$$

$$\text{जबकि} \quad h=\frac{b-a}{n} \qquad \text{(v)}$$

(v) के दाएँ पक्ष के व्यजंक को हम एक **निश्चित समाकल** की परिभाषा के रूप में लेते हैं। इस समाकल को $\int_a^b f(x)\,dx$ द्वारा व्यक्त किया जाता है और इस प्रकार पढ़ा जाता है : 'a से b तक $f(x)$ का समाकल'। संकेत $\int_a^b f(x)\,dx$ में संख्याओं a तथा b को क्रमशः समाकलन की **निम्न सीमा** व **उच्च सीमा** कहते हैं, तथा $f(x)$ को **समाकल्य** कहते हैं।

टिप्पणी: [a, b] में f के औसत मानों के आकलनों को प्राप्त करने के लिए, हमने उपअंतरालों के बाएँ पक्षों के सिरे के बिन्दुओं को लिया है। बाएँ पक्षों के सिरों के बिन्दुओं को ही क्यों लिया? क्यों नहीं उपअंतराल के दाएँ पक्ष सिरे के बिन्दुओं को लिया?

हम उपअंतराल के दाएँ पक्ष के सिरे के बिन्दुओं को भी ले सकते हैं। तब सूत्र हमें इस प्रकार का मिलेगा।

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a+h)+f(a+2h)+......+f(b)\},$$

$$\text{जबकि} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h)+f(a+2h)+......+f(b)\right] \qquad \text{(vi)}$$

उदाहरण 31.1. $\int_1^2 x\,dx$ को योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

हल : परिभाषा से,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+........+f\{a+(n-1)h\}\right],$$

$$\text{जबकि } h = \frac{b-a}{n}$$

यहाँ, $a = 1, b = 2, f(x) = x$ और $h = \dfrac{1}{n}$ ।

$$\therefore \qquad \int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)+........+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)........+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{1+1+......+1}_{n \text{ बार}}+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+........+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}\{1+2+......+(n-1)\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{(n-1).n}{n.2}\right]\left[\because 1+2+3+....+(n-1)=\frac{(n-1).n}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{3n-1}{2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}\right] = \frac{3}{2}$$

उदाहरण 31.2. $\int_0^2 e^x dx$ को योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

हल : परिभाषा से,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+.....+f\{a+(n-1)h\}\right],$$

$$\text{जबकि} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

यहाँ $a = 0, b = 2, f(x) = e^x$ तथा $h = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ ।

$$\therefore \qquad \int_0^2 e^x dx = \lim_{h \to 0} h\left[f(0) + f(h) + f(2h) + \ldots\ldots + f(n-1)h\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} h\left[e^0 + e^h + e^{2h} + \ldots\ldots + e^{(n-1)h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} h\left[e^0\left(\frac{\left(e^h\right)^n - 1}{e^h - 1}\right)\right]$$

$$\left[\text{क्योंकि} \quad a + ar + ar^2 + \ldots\ldots + ar^{n-1} = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} h\left[\frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}\left[\frac{e^2 - 1}{\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)}\right] \qquad (\because nh = 2)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^2 - 1}{\frac{e^h - 1}{h}} = \frac{e^2 - 1}{1} = e^2 - 1 \qquad \left[\because \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\right]$$

उदाहरण 31.1 तथा 31.2 में, हम देखते हैं कि निश्चित समाकल का मान योग की सीमा के रूप में निकालना काफी कठिन है। इस कठिनाई के समाधान के लिए, हमारे पास समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय है जिसका कथन है :

प्रमेय 1 : यदि [a,b] में f सतत है तथा [a,b] में f का एक प्रति अवकलज F है,

$$\text{तो} \qquad \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad \ldots\ldots(1)$$

सामान्यतः, अन्तर $F(b) - F(a)$ को $\left[F(x)\right]_a^b$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, जिससे (1) को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big]_a^b \text{ या } \left[F(x)\right]_a^b$$

दूसरे शब्दों में, यह प्रमेय हमें बताती है कि

$$\int_a^b f(x)\, dx = (\text{उच्च सीमा } b \text{ पर प्रतिअवकलज का मान}) -$$

$$(\text{उसी प्रतिअवकलज का निम्न सीमा } a \text{ पर मान})$$

उदाहरण 31.3. निम्न के मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ (b) $\int_0^2 e^{2x} \, dx$

हल : (a) हम जानते हैं कि $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

(b)
$$\int_0^2 e^{2x} \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2, \qquad \left[\because \int e^x dx = e^x\right]$$

$$= \left(\frac{e^4 - 1}{2}\right)$$

प्रमेय 2 : यदि [a,b] में f तथा g दो सतत फलन हैं तथा c अचर है, तो

(i) $\int_a^b c f(x) dx = c\int_a^b f(x) \, dx$

(ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$

(iii) $\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$

उदाहरण 31.4. $\int_0^2 \left(4x^2 - 5x + 7\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\int_0^2 \left(4x^2 - 5x + 7\right) dx = \int_0^2 4x^2 dx - \int_0^2 5x \, dx + \int_0^2 7 \, dx$$

$$= 4\int_0^2 x^2 dx - 5\int_0^2 x dx + 7\int_0^2 1 \, dx$$

$$= 4.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 7[x]_0^2$$

$$= 4.\left(\frac{8}{3}\right) - 5\left(\frac{4}{2}\right) + 7(2)$$

$$= \frac{32}{3} - 10 + 14 = \frac{44}{3}$$

देखें आपने कितना सीखा 31.1

1. $\int_0^5 (x+1)\,dx$ को योग की सीमा लेकर ज्ञात कीजिए।

2. $\int_{-1}^{1} e^x\,dx$ को योग की सीमा लेकर ज्ञात कीजिए।

3. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

   (c) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। (d) $\int_1^2 \left(4x^3 - 5x^2 + 6x + 9\right)dx$ ज्ञात कीजिए।

31.2 प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना

निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने के लिए, मुख्य बात है संबंधित अनिश्चित समाकल ज्ञात करना। पूर्व पाठों में, अनिश्चित समाकल ज्ञात करने के लिए, हमने बहुत सी विधियों की चर्चा की है। अनिश्चित समाकल ज्ञात करने की विधियों में एक महत्वपूर्ण विधि प्रतिस्थापन विधि है। जब हम निम्न निश्चित समाकलों जैसे समाकलों का मान ज्ञात करने के लिए प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करते हैं :

$$\int_2^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx,$$

तो निम्नलिखित चरणों का पालन करते हैं:

(i) दिए हुए समाकल को एक समुचित प्रतिस्थापन द्वारा एक ज्ञात रूप में बदल लिया जाए तथा समाकलन योग्य बना लिया जाए। समाकल को नए चर के पदों में लिखिए।

(ii) नए चर के सापेक्ष नए समाकल्य का समाकलन कीजिए।

(iii) तदनुसार सीमाओं को बदला जाए तथा उच्च और निम्न सीमाओं पर मानों का अन्तर ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी: यदि हम सीमा को नए चर के सापेक्ष नहीं बदलते, तो समाकलन के पश्चात नए चर के लिए पुनः प्रतिस्थापन कीजिए तथा मूल चर में उत्तर लिखिए। समाकल की दी हुई सीमाओं से अब उत्तर ज्ञात कर लीजिए।

उदाहरण 31.5. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\,d\theta$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\cos x}$

हल : (a) माना $\cos x = t$ है।

तब, $\sin x\,dx = -dt$

जब $x=0,\ t=1$ तथा $x=\dfrac{\pi}{2}, t=0$ है, जब $x, 0$ से $\dfrac{\pi}{2}$ तक विचरण करता है, तो t में संगत विचरण 1 से 0 तक होता है।

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_1^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\left[\tan^{-1} t\right]_1^0$$

$$= -\left[\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1\right] = -\left[0-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}$$

(b) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta\, d\theta}{1-2\sin^2\theta\left(1-\sin^2\theta\right)}$$

माना $\sin^2\theta = t$ है।

तब, $2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dt$

अर्थात् $\sin 2\theta\, d\theta = dt$

जब $\theta = 0, t = 0$ तथा जब $\theta = \dfrac{\pi}{2}, t = 1$

जैसे-जैसे θ, 0 से $\dfrac{\pi}{2}$ तक विचरण करता है वैसे-वैसे नए चर 't' का संगत विचरण 0 से 1 तक होता है।

$$\therefore \quad I = \int_0^1 \frac{1}{1-2t(1-t)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^1 = \left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}(-1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(c) हम जानते हैं कि $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+\dfrac{4\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{9+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx \qquad (1)$$

माना $\tan\dfrac{x}{2} = t$

तब, $\sec^2\dfrac{x}{2}\,dx = 2dt$ है, जब $x = 0,\ t = 0$ तथा जब $x = \dfrac{\pi}{2},\ t = 1$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{9+t^2}\,dt \qquad .....[(1) \text{ से}]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{t}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$$

31.3 निश्चित समाकलों के कुछ गुण

सीमाओं a तथा b के मध्य f(x) का निश्चित समाकल पहले ही निम्न रूप में परिभाषित किया जा चुका है :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ जहाँ } \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x), \text{ जहाँ}$$

a तथा b क्रमशः समाकलन की निम्न तथा उच्च सीमाएँ हैं। अब हम ऐसे निश्चित समाकलों के कुछ महत्वपूर्ण तथा उपयोगी गुणों के कथन नीचे दे रहे हैं :

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ (ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$ जहाँ $a < c < b$ है।

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\displaystyle\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(2a-x)\,dx$

(vi) $\displaystyle\int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx$

(vii) $\displaystyle\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{यदि } f(2a-x) = -f(x) \\ 2\displaystyle\int_0^{a} f(x)\,dx, & \text{यदि } f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

(viii) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{यदि } f(x), x \text{ का एक विषम फलन है} \\ 2\displaystyle\int_0^{a} f(x)\,dx, & \text{यदि } f(x), x \text{ का एक सम फलन है} \end{cases}$

बहुत से निश्चित समाकल, जो अन्यथा बहुत कठिन होते हैं, उपरोक्त गुणों द्वारा आसानी से ज्ञात किए जा सकते हैं।

निम्न उदाहरणों में निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने में, इन गुणों के प्रयोग को स्पष्ट किया गया है

उदाहरण 31.6. दर्शाइए कि

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\tan x|\,dx = 0$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \pi$

हल : माना $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\tan x|\,dx$ ....(i)

गुण $\displaystyle\int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx$ का प्रयोग करते हुए, हमें प्राप्त होता है :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cot x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\tan x)^{-1}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\tan x\,dx = -I$$

[(i) का प्रयोग करने पर]

$\therefore$ $2I = 0$

अर्थात्, $I = 0$ या $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log |\tan x| \, dx = 0$

(b) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx$

माना $$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx \qquad \text{(i)}$$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin(\pi - x)} dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin x} dx \qquad \text{(ii)}$$

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x + \pi - x}{1+\sin x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x} dx$$

या $$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\sec^2 x - \tan x \sec x\right) dx$$

$$= \pi [\tan x - \sec x]_0^{\pi} = \pi [(\tan \pi - \sec \pi) - (\tan 0 - \sec 0)]$$

$$= \pi [0 - (-1) - (0 - 1)] = 2\pi$$

$$\therefore \quad I = \pi$$

उदाहरण 31.7. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$

हल : (a) माना $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \qquad \text{(i)}$$

साथ ही, $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$$

(गुण $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ का प्रयोग करने पर)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \qquad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) को जाड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ $$I = \frac{\pi}{4}$$

अर्थात्, $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$$

(b) मान लीजिए $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx \qquad \text{(i)}$$

तब, $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \quad \ldots\ldots \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x \sin x} dx \qquad \text{(ii)}$$

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर, हमें मिलता है :

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + \cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx = 0$$

$\therefore$ $$I = 0$$

उदाहरण 31.8. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{xe^{x^2}}{1+x^2} dx$ (b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x+1|\,dx$

हल : (a) यहाँ $f(x) = \dfrac{xe^{x^2}}{1+x^2}$ है।

$$\therefore \qquad f(-x) = -\frac{xe^{x^2}}{1+x^2} = -f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$, x का एक विषम फलन है।

$$\therefore \qquad \int_{-a}^{a} \frac{xe^{x^2}}{1+x^2}\,dx = 0$$

(b) $\int_{-3}^{3} |x+1|\,dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ यदि } x \geq -1 \\ -x-1, \text{ यदि } x < -1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \int_{-3}^{3} |x+1|\,dx = \int_{-3}^{-1} |x+1|\,dx + \int_{-1}^{3} |x+1|\,dx \qquad \text{[गुण (iii) का प्रयोग करके]}$$

$$= \int_{-3}^{-1} (-x-1)\,dx + \int_{-1}^{3} (x+1)\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} - x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 1 = 10$$

उदाहरण 31.9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना
$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx \qquad .....(i)$$

साथ ही,
$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]dx \qquad \text{[गुण (iv) का प्रयोग करके]}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\,dx \qquad .....(ii)$$

(i) और (ii) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [\log(\sin x) + \log(\cos x)]\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \qquad \text{(iii)}$$

पुनः, माना, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\, dx$ है।

$2x = t$ रखिए, जिससे $dx = \frac{1}{2} dt$

जब $x = 0, t = 0$ तथा जब $x = \frac{\pi}{2}, t = \pi$

$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin t)\, dt$

$$= \frac{1}{2}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, dt, \qquad \text{[गुण (vi) का प्रयोग करके]}$$

$$= \frac{1}{2}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dt \qquad \text{[गुण (i) का प्रयोग करके]}$$

$\therefore \quad I_1 = I$ है $\qquad$ [(i) से] $\qquad$ .....(iv)

(iii) में इस मान को रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

अतः, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$

देखें आपने कितना सीखा 31.2

निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए :

1. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ $\qquad$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\sin x}$ $\qquad$ 3. $\int_0^1 \frac{2x + 3}{5x^2 + 1} dx$

4. $\int_{-5}^{5} |x+2|\,dx$ 5. $\int_{0}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx$ 6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\,dx$ 8. $\int_{-a}^{a} \frac{x^3 e^{x^4}}{1+x^2}\,dx$ 9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log \tan x\,dx$

10. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$

31.4 समाकलन के अनुप्रयोग

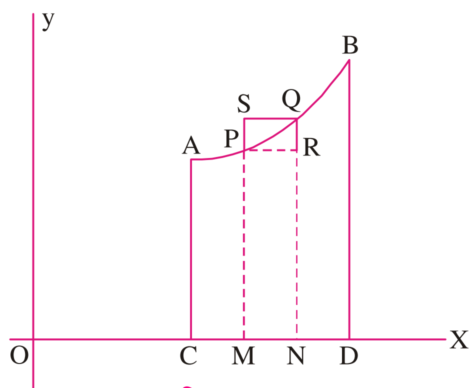
माना अन्तराल [a, b] में दो सतत फलन f तथा g ऐसे हैं कि प्रत्येक $x \in [a,b]$ के लिए, $f(x) \geq g(x)$ अर्थात् वक्र $y = f(x)$ अन्तराल [a,b] में वक्र $y = g(x)$ का नीचे से प्रतिच्छेदन नहीं करता है। अब प्रश्न यह है कि ऊपर से $y = f(x)$, नीचे से $y = g(x)$ तथा दोनों ओर $x = a$ और $x = b$ से परिबद्ध (घिरे) क्षेत्रफल को कैसे ज्ञात करें। पुनः, क्या होता है जब ऊपरी वक्र $y = f(x)$ नीचे वाले वक्र $y = g(x)$ को या तो बाईं पक्ष सीमा $x = a$ या दाईं पक्ष सीमा $x = b$ अथवा दोनों पर काटता है?

31.4.1 वक्र, x- अक्ष तथा कोटियों द्वारा परिबद्ध (घिरा) क्षेत्रफल

मान लीजिए वक्र $f(x)$, AB है तथा CA और DB क्रमशः $x = a$ और $x = b$ पर दो कोटियां हैं। पुनः मान लीजिए कि $y = f(x)$ अंतराल $a \leq x \leq b$ में x का एक वर्धमान फलन है।

माना $P(x, y)$ वक्र पर कोई बिन्दु है तथा

$Q(x+\delta x,\ y+\delta y)$ इस पर एक निकटवर्ती बिन्दु है। इनकी कोटियों PM तथा QN को खींचिए।



चित्र 31.6

यहाँ हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x बदलता है, वैसे-वैसे क्षेत्रफल (ACMP) भी बदलता है।

माना A= क्षेत्रफल (ACMP) है।

तब, क्षेत्रफल (ACNQ) $= A + \delta A$

क्षेत्रफल (PMNQ) = क्षेत्रफल (ACNQ)–क्षेत्रफल (ACMP)

$$= A + \delta A - A = \delta A$$

आयत PRQS को पूरा कीजिए। तब क्षेत्रफल (PMNQ) आयतों PMNR तथा SMNQ के क्षेत्रफल के मध्य में स्थित है। अर्थात्

δA, $y\,\delta x$ तथा $(y+\delta y)\,\delta x$ के मध्य में स्थित है।

$\Rightarrow \quad \dfrac{\delta A}{\delta x}$, y तथा $y + \delta y$ के मध्य में स्थित है।

सीमांत की स्थिति में, जब $Q \to P, \delta x \to 0$ तथा $\delta y \to 0$ है।

$\therefore \quad \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta A}{\delta x}$, y तथा $\lim\limits_{\delta y \to 0}(y + \delta y)$ के मध्य में स्थित है।

$\therefore \quad \dfrac{dA}{dx} = y$

$x = a$ से $x = b$ तक, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{dA}{dx} \cdot dx = [A]_a^b$$

= (क्षेत्रफल जब $x = b$) – (क्षेत्रफल जब $x = a$)

= क्षेत्रफल (ACDB) – 0 = क्षेत्रफल (ACDB)

अत: क्षेत्रफल (ACDB) $= \int_a^b f(x)\,dx$

वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{या} \quad \int_a^b y\,dx \quad \text{है,}$$

जहाँ $y = f(x)$ एक संतत एकमानी फलन है तथा अतंराल $a \le x \le b$ में y चिन्ह नहीं बदलता।

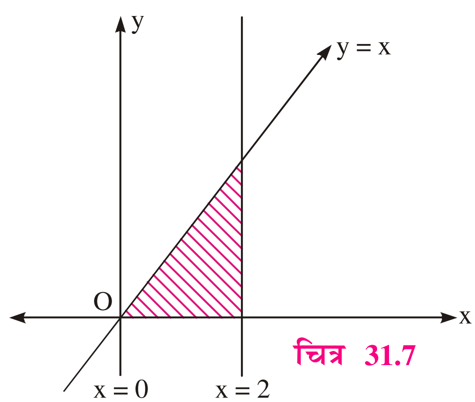
उदाहरण 31.10. वक्र $y = x$, x-अक्ष तथा रेखाओं $x = 0$ और $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र $y = x$ है।

$\therefore$ वक्र $y = x$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 0$ और $x = 2$ द्वारा परिबद्ध अभीष्ट क्षेत्रफल (जैसा कि चित्र 12.7 में दिखाया गया है)

$$= \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$= 2 - 0 = 2$ वर्ग इकाई



चित्र 31.7

उदाहरण 31.11. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा x-अक्ष द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र $x^2 + y^2 = a^2$ एक वृत्त है, जिसका केन्द्र (0,0) तथा त्रिज्या a है। अत: हमें वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 0$ और $x = a$ द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^a y\,dx$

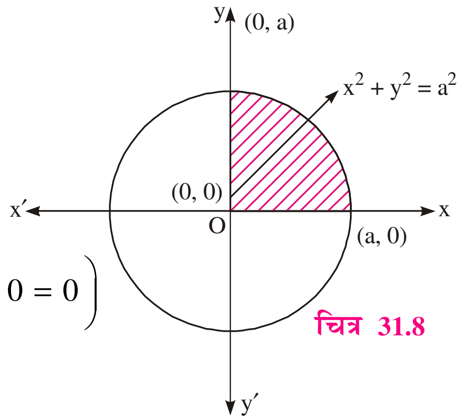
$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \qquad (\because \text{ प्रथम चतुर्थांश में } y \text{ धनात्मक है})$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \left(\because \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}, \sin^{-1}0 = 0\right)$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ वर्ग इकाई}$$



चित्र 31.8

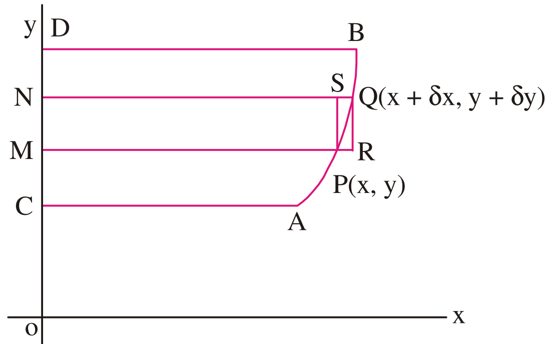
देखें आपने कितना सीखा 31.3

1. वक्र $y = x^2$, x – अक्ष तथा रेखाओं $x = 0$ और $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. वक्र $y = 3x$, x – अक्ष तथा रेखाओं $x = 0$ और $x = 3$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

31.4.2 वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = c$, $y = d$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करना

माना AB वक्र $x = f(y)$ है तथा CA और DB क्रमशः $y = c$ और $y = d$ पर भुज हैं।

माना $P(x, y)$ वक्र पर कोई बिन्दु है तथा $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ इस पर एक निकटवर्ती बिन्दु है। PM तथा QN, y-अक्ष पर क्रमशः P तथा Q से लम्ब खींचिए। जब y बदलता है, तो क्षेत्रफल (ACMP) भी बदलता है तथा स्पष्टतः यह y का एक फलन है। माना A, क्षेत्रफल (ACMP) को व्यक्त करता है तब क्षेत्रफल (ACNQ), $A + \delta A$ होगा।



चित्र 31.9

$\therefore$ क्षेत्रफल (PMNQ) = क्षेत्रफल (ACNQ) – क्षेत्रफल (ACMP)

$$= A + \delta A - A = \delta A$$

आयत PRQS को पूरा कीजिए। तब क्षेत्रफल (PMNQ), क्षेत्रफल (PMNS) तथा क्षेत्रफल RMNQ के मध्य स्थित है, अर्थात्

δA, $x\,\delta y$ तथा $(x + \delta x)\delta y$ के मध्य स्थित होगा।

$\Rightarrow$ $\dfrac{\delta A}{\delta y}$, x तथा $x + \delta x$ के मध्य स्थित होगा।

सीमांत स्थिति में, जब $Q \to P$, $\delta x \to 0$ तो $\delta y \to 0$ है।

$\therefore \qquad \lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta A}{\delta y}$, x तथा $\lim_{\delta x \to 0} (x + \delta x)$ के मध्य स्थित होगी।

$\Rightarrow \qquad \frac{dA}{dy} = x$

सीमाओं c से d तक के सापेक्ष दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\int_c^d x\,dy = \int_c^d \frac{dA}{dy} \cdot dy$$

$$= [A]_c^d$$

$= ($क्षेत्रफल जब $y = d) - ($क्षेत्रफल जब $y = c)$

$=$ क्षेत्रफल (ACDB) $- 0$

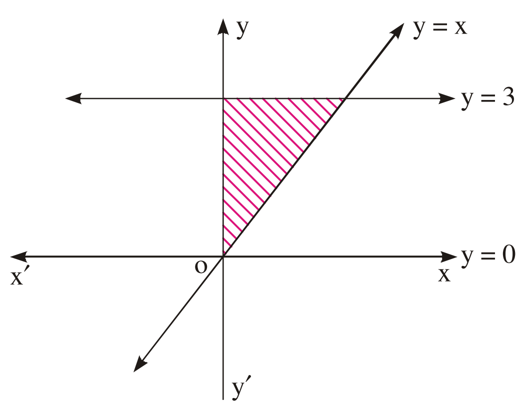
$=$ क्षेत्रफल (ACDB)

अत:, क्षेत्रफल (ACDB) $= \int_c^d x\,dy = \int_c^d f(y)\,dy$

वक्र $x = f(y)$, y – अक्ष तथा रेखाओं $y = c$ और $y = d$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल

$\int_c^d x\,dy$ या $\int_c^d f(y)\,dy$ है

जहाँ $x = f(y)$ एक सतत एकमानी फलन है और अंतराल $c \le y \le d$ में x का चिन्ह नहीं बदलता।



चित्र 31.10

उदाहरण 31.12. वक्र $x = y$, y – अक्ष तथा रेखाओं $y = 0$ और $y = 3$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र $x = y$ है।

$\therefore$ वक्र, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = 0, y = 3$ द्वारा परिबद्ध अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 x\,dy = \int_0^3 y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3$$

$= \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 12.13. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा y-अक्ष द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल : दिया हुआ वक्र वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ है, जिसका केन्द्र (0,0) तथा त्रिज्या a है। अत: हमें वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$, y-अक्ष तथा भुजों $y = 0$ और $y = 1$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

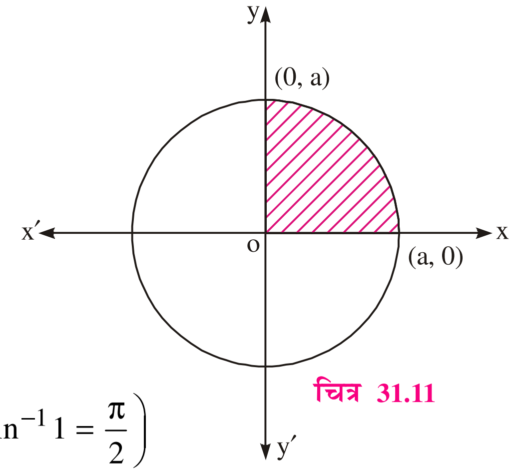
अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^a x\,dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy$

($\because$ प्रथम चतुर्थांश में x धनात्मक होता है)

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ वर्ग इकाई} \qquad \left(\because \sin^{-1}0 = 0, \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}\right)$$



चित्र 31.11

टिप्पणी: यह क्षेत्रफल वही है, जो उदाहरण 31.11 में है। इसका कारण है कि वक्र अक्षों के सापेक्ष सममित हैं। ऐसे प्रश्नों में यदि हमसे वक्र का क्षेत्रफल पूछा गया है, तो बिना किसी रुकावट के, हम दोनों में से किसी एक विधि से ज्ञात कर सकते हैं।

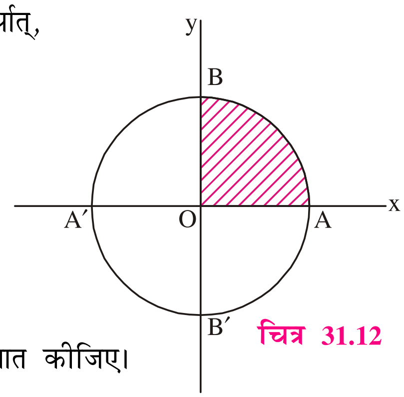
उदाहरण 12.14. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का पूरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र का समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ है। वृत्त दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है। अत: वृत्त का क्षेत्रफल वृत्त के प्रथम चतुर्थांश के क्षेत्रफल का चार गुना है। अर्थात्,

वृत्त का क्षेत्रफल $= 4 \times OAB$ का क्षेत्रफल

$$= 4 \times \frac{\pi a^2}{4} \quad \text{(उदाहरणों 12.11 तथा 12.13 से)}$$

$$= \pi a^2 \text{ वर्ग इकाइयाँ}$$



चित्र 31.12

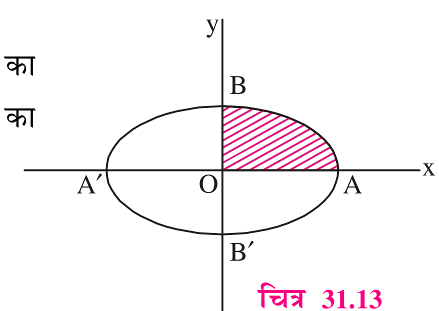
उदाहरण 12.15. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का पूरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है।

दीर्घवृत्त, दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है।

अत: दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्रफल का चार गुना है। अर्थात् दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल $= 4 \times (OAB)$ का क्षेत्रफल, प्रथम चतुर्थांश में

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{या} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$



चित्र 31.13

अब क्षेत्रफल (OAB) के लिए x, 0 से a तक परिवर्तित होता है।

$\therefore$ (OAB) का क्षेत्रफल $= \int_0^a y\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

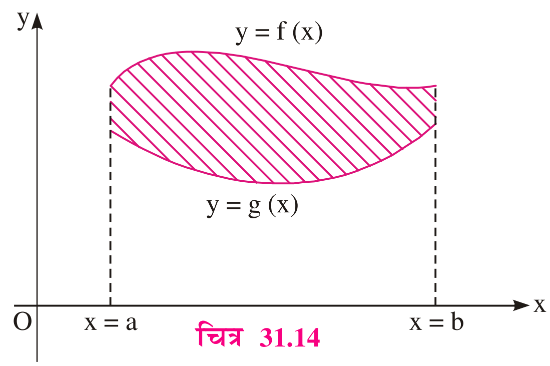
$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0\right] = \frac{ab\pi}{4}$$

दीर्घवृत्त का पूरा क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{ab\pi}{4} = \pi ab$ वर्ग इकाई

31.4.3 दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल

माना अंतराल [a,b] पर दो फलन $f(x)$ तथा $g(x)$ सतत और ऋणेतर हैं। ऐसा है कि $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ अर्थात् $x \in [a, b]$ के लिए वक्र $y = f(x)$ वक्र $y = g(x)$ को नीचे से नहीं काटता। हम $y = f(x)$ द्वारा ऊपर $y = g(x)$ द्वारा नीचे तथा दोनों पक्षों में $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं।



चित्र 31.14

A = [y = f(x) के नीचे क्षेत्रफल] − [y = g(x) के नीचे क्षेत्रफल] .....(1)

अब, वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल की परिभाषा का प्रयोग करते हुए, हमें प्राप्त है :

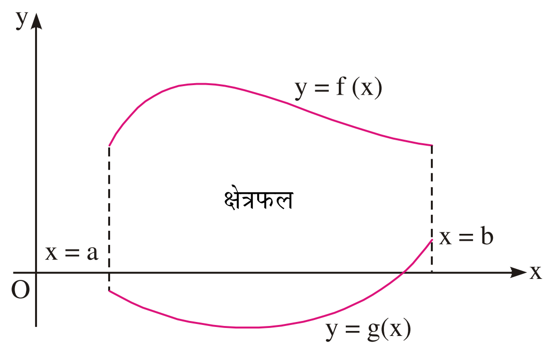
$y = f(x)$ के नीचे का क्षेत्रफल $= \int_a^b f(x)\,dx$ ...(2)

इसी प्रकार, $y = g(x)$ के नीचे का क्षेत्रफल $= \int_a^b g(x)\,dx$ ...(3)

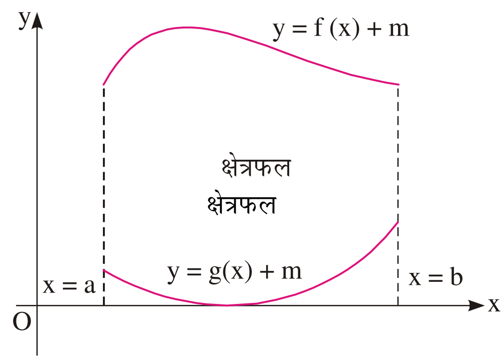
(2) और (3) समीकरणों का प्रयोग (1) में करते हुए हमें प्राप्त है,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \quad ...(4)$$

क्या होता है जब g के मान ऋणात्मक भी हों? $f(x)$ और $g(x)$ जब तक x-अक्ष के ऊपर न हो जाएँ ऐसा स्थानांतरण करके इस सूत्र को विस्तृत किया जा सकता है। इसके लिए माना [a, b] पर $g(x)$ का न्यूनतम मान $-m$ है (चित्र 31.15 देखिए)।



चित्र 31.15



चित्र 31.16

चूंकि $g(x) \geq -m \quad \Rightarrow \quad g(x) + m \geq 0$

अब फलन $g(x) + m$ तथा $f(x) + m$, [a, b] पर ऋणेतर है (चित्र 31.16 देखिए)। अंतर्ज्ञान से यह स्पष्ट है कि घिरे भाग का क्षेत्रफल स्थानांतरण द्वारा अपरिवर्तित रहता है। अत: f और g के मध्य का क्षेत्रफल A वही क्षेत्रफल है जो $f(x)+m$ तथा $g(x)+m$ के मध्य है। इस प्रकार

A = [f(x) + m के नीचे क्षेत्रफल] – [g(x) + m के नीचे क्षेत्रफल] ....(5)

अब, वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल की परिभाषा का प्रयोग करके हमें प्राप्त है :

$y = f(x) + m$ के नीचे का क्षेत्रफल $= \int_a^b [f(x) + m]\,dx$ ....(6)

तथा $y = g(x) + m$ के नीचे का क्षेत्रफल $= \int_a^b [g(x) + m]\,dx$ ....(7)

समीकरणों (5), (6) तथा (7) द्वारा

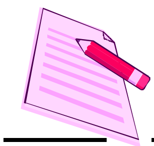
$$A = \int_a^b [f(x) + m]\,dx - \int_a^b [g(x) + m]\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

यह वही है जो (4) है। इस प्रकार,

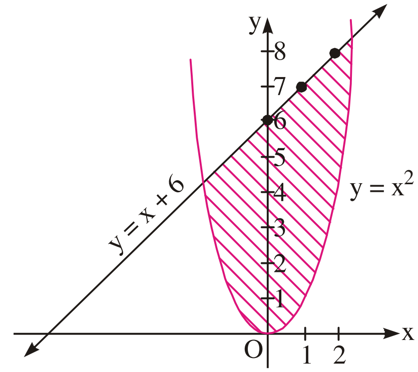
यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अंतराल [a,b] पर सतत फलन हैं तथा $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ तो $y = f(x)$ द्वारा ऊपर से $y = g(x)$ द्वारा नीचे से $x = a$ द्वारा बाएँ से तथा $x = b$ द्वारा दाएँ से परिबद्ध क्षेत्रफल

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



उदाहरण 31.16. वक्र $y = x^2$ तथा $y = x + 6$ के द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल : हम जानते हैं कि $y = x^2$ परवलय का समीकरण है जो y-अक्ष के सापेक्ष सममित है और मूल बिन्दु शीर्ष है। $y = x + 6$ सरल रेखा का समीकरण है (देखिए चित्र 31.17)।



चित्र 31.17

क्षेत्र का आलेख दर्शाता है कि नीचे की सीमा $y = x^2$ है तथा ऊपर की सीमा $y = x + 6$ है। यह दोनों वक्र दो बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। इन दोनों समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त है।

$$x^2 = x + 6 \qquad \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x-3)(x+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 3, -2$$

जब $x = 3, y = 9$ तथा जब $x = -2, y = 4$ है।

यहाँ $f(x) = x + 6, g(x) = x^2, a = -2, b = 3$

$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_{-2}^{3}\left[(x+6) - x^2\right]dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}$$

$$= \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 31.17. वक्रों $y^2 = 4x$ तथा $y = x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $y^2 = 4x$ परवलय का समीकरण है, जो x-अक्ष के सापेक्ष सममित है और शीर्ष मूल बिन्दु है। $y = x$ मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण है (चित्र 31.18 देखिए)। क्षेत्र का आलेख दर्शाता है कि नीचे की सीमा $y = x$ है और ऊपर की सीमा $y^2 = 4x$ है। ये दोनों वक्र बिन्दुओं O तथा A पर काटते हैं। इन दोनों समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त होता है :

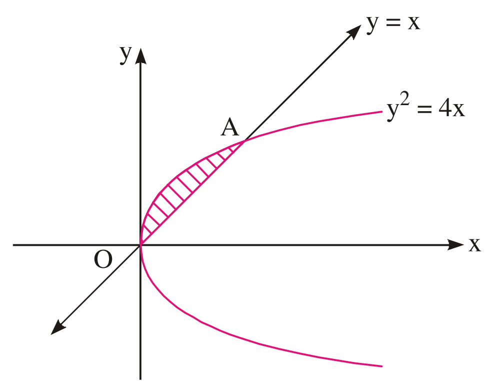
$$\frac{y^2}{4} - y = 0$$

$$\Rightarrow \qquad y(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad y = 0, 4$$

जब $y = 0, x = 0$ तथा जब $y = 4, x = 4$ है।

यहां $\quad f(x) = (4x)^{\frac{1}{2}}, g(x) = x, a = 0, b = 4$



चित्र 31.18

$$\text{अतः, अभीष्ट क्षेत्रफल} \qquad = \int_0^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - x\right)dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 31.18. परवलयों $x^2 = 4ay$ तथा $y^2 = 4ax$ के उभयनिष्ठ भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $x^2 = 4ay$ तथा $y^2 = 4ax$ परवलय के समीकरण है जो क्रमशः x-अक्ष तथा y-अक्ष के सापेक्ष सममित है और दोनों के शीर्ष मूलबिन्दु पर हैं (चित्र 31.19 देखिए)।

क्षेत्र का स्केच दर्शाता है कि नीचे की सीमा $x^2 = 4ay$ है तथा ऊपर की सीमा $y^2 = 4ax$ है ये दोनों वक्र दो बिन्दुओं O तथा A पर मिलते हैं। इन समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{x^4}{16a^2} = 4ax$$

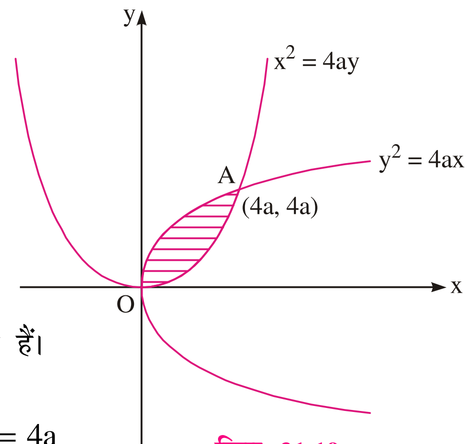
$$\Rightarrow \quad x\left(x^3 - 64a^3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, 4a$$

जब $x = 0, y = 0$ तथा $x = 4a, y = 4a$ है।

अतः, दोनों परवलय बिन्दुओं (0,0) तथा (4a, 4a) पर काटते हैं।

यहाँ $f(x) = \sqrt{4ax}, g(x) = \dfrac{x^2}{4a}, a = 0$ तथा $b = 4a$



चित्र 31.19

अतः, अभीष्ट क्षेत्रफल,

$$= \int_0^{4a}\left[\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a}\right]dx = \left[\frac{2.2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{12a}\right]_0^{4a}$$

$$= \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3} = \frac{16}{3}a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

देखें आपने कितना सीखा 31.4

1. वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. दीर्घवृत $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. दीर्घवृत $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. वक्रों $y^2 = 4ax$ तथा $y = \dfrac{x^2}{4a}$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।
5. वक्रों $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4y$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।
6. वक्रों $y = x^2$ तथा $y = x + 2$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

आइये दोहराएँ

- यदि [a,b] में f सतत फलन है और f का प्रतिअवकलज [a,b] में F है, तब

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- यदि [a,b] में f और g सतत फलन है तथा c एक अचर है, तब

(i) $$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

(ii) $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) $$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र होता है

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{या} \quad \int_a^b y\,dx$$

- जबकि $y = f(x)$ एक सतत एकमानी फलन है तथा अंतराल $a \le x \le b$ में y चिन्ह नहीं बदलता है।
- यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ अंतराल [a,b] में सतत फलन है और $f(x) \ge g(x)\ \forall x \in [a,b]$, तब $y = f(x)$ द्वारा उपर की ओर परिबद्ध नीचे की ओर $y = g(x)$ द्वारा परिबद्ध, बायीं ओर $x = a$ तथा दायीं ओर $x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

सहायक वेबसाइट

- *http://mathworld.wolfram.com/DefiniteIntegral.html*
- *http://www.mathsisfun.com/calculus/integration-definite.html*
- *https://www.youtube.com/watch?v=ysvFgARjjBM*

आइए अभ्यास करें

निम्नलिखित समाकलों (1 से 6 तक) के मान योग की सीमा से ज्ञात कीजिए :

1. $\int_a^b x\,dx$ 2. $\int_a^b x^2\,dx$ 3. $\int_0^2 \left(x^2 + 1\right)dx$

निम्नलिखित समाकलों (4 से 22 तक) के मान ज्ञात कीजिए :

4. $\int_0^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ 5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$ 6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ 8. $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx$ 9. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

10. $\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 4}\,dx$ 11. $\int_0^{\pi} \frac{1}{5 + 3\cos\theta}\,d\theta$ 12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$ 14. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$ 15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta}\cos^5\theta\,d\theta$

16. $\int_0^{\pi} x \log \sin x\,dx$ 17. $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x)\,dx$ 18. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$ 20. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x)\,dx$

21. वक्र $x = y^2$, y-अक्ष तथा रेखाओं $y = 0$ और $y = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

22. वक्रों $y = x^2$ तथा $y = x$ के द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

23. वक्र $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $x = 3$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

24. एक ऐसे त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक (1, 0), (2, 2) एवं (3, 1) है।

25. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ तथा सरल रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ द्वारा घिरे छोटे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

26. परवलय $y = x^2$ तथा वक्र $y = |x|$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 31.1

1. $\frac{35}{2}$ 2. $e - \frac{1}{e}$

3. (a) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ (b) 2 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{64}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 31.2

1. $\frac{e-1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

4. 29 5. $\frac{24\sqrt{2}}{15}$ 6. $\frac{\pi}{4}$ 7. $-\frac{\pi}{2}\log 2$

8. 0 9. 0 10. $\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\log 2\right]$

देखें आपने कितना सीखा 31.3

1. $\frac{8}{3}$ वर्ग इकाई 2. $\frac{27}{2}$ वर्ग इकाई

देखें आपने कितना सीखा 31.4

1. 9π वर्ग इकाई 2. 6π वर्ग इकाई 3. 20π वर्ग इकाई

4. $\frac{16}{3}a^2$ वर्ग इकाई 5. $\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई 6. $\frac{9}{2}$ वर्ग इकाई

आइए अभ्यास करें

1. $\frac{b^2-a^2}{2}$ 2. $\frac{b^3-a^3}{3}$ 3. $\frac{14}{3}$

4. $\frac{\pi a^2}{4}$ 5. 1 6. $\frac{1}{2}\log 2$

7. $\frac{\pi}{4}$ 8. $\frac{\pi}{2}-1$ 9. $\frac{\pi}{2}$

10. $\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$ 11. $\frac{\pi}{4}$ 12. $1-\log 2$

13. $\frac{2}{3}$ 14. $\frac{16}{15}\left(2+\sqrt{2}\right)$ 15. $\frac{64}{231}$

16. $-\frac{\pi^2}{2}\log 2$ 17. $-\pi\log 2$ 18. $\frac{\pi^2}{4}$

19. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$ 20. $\frac{\pi}{8}\log 2$ 21. $\frac{8}{3}$ वर्ग इकाई

22. $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई 23. $8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई 24. $\frac{2}{3}$ वर्ग इकाई

25. $\frac{2}{3}(\pi-2)$ वर्ग इकाई 26. $\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई

32

अवकल समीकरण

अवकलन तथा समाकलन की संकल्पना पढ़ लेने के बाद हमारे सामने प्रश्न है कि उनका प्रयोग कहां किया जाए।

वास्तव में ये वे साधन हैं जो सही–सही प्रारम्भिक चाल, प्रक्षेप कोण, आवश्यक प्रणोद तथा आन्तरिक्ष प्रमोचन में अन्य सम्बंधित विशिष्टताओं को ज्ञात करने में हमारी सहायता करते हैं।

केवल यहीं नहीं, बल्कि भौतिकी तथा जीव विज्ञान में कुछ प्रश्नों में हमें ऐसे सम्बन्ध मिलते हैं जो अवकलज से सम्बद्ध होते हैं।

एक ऐसा सम्बन्ध $\frac{ds}{dt} = 4.9\ t^2$ हो सकता है जहां s दूरी है, t समय है, अतः, $\frac{ds}{dt}$, समय t पर वेग (दूरी के परिवर्तन की दर) निरूपित करता है।

ऐसे समीकरणों को, जिनके पद अवकलज सम्बद्ध होते हैं, अवकल समीकरण कहते हैं। इस पाठ में हम, ऐसे समीकरणों के हल तथा उन के प्रयोग पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- अवकल समीकरण, इसकी कोटि तथा घात को परिभाषित कर सकना
- अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कर सकना
- दी गई स्थिति से अवकल समीकरण बना सकना
- उदाहरण द्वारा अवकल समीकरण के व्यापक हल तथा विशिष्ट हल के अर्थ की व्याख्या कर सकना
- निम्न प्रकार के अवकल समीकरणों को हल कर सकना

  (i) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ (ii) $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$

  (iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ (iv) $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$
- दिए हुए सीमा प्रतिबन्धों के लिए, दिए हुए अवकल समीकरण के विशिष्ट हल ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- बीजीय फलनों, परिमेय फलनों तथा त्रिकोणमितीय फलनों का समाकलन

32.1 अवकल समीकरण

जैसा कि भूमिका में वर्णन किया गया है कि भौतिकी, जीव विज्ञान तथा समाजशास्त्र के प्रश्नों को गणितीय पदों में जब सूत्रण किया जाता है तो ऐसे समीकरण बनते हैं जो अवकलज सम्बद्ध होते हैं। ऐसे समीकरणों को अवकल समीकरण कहते हैं। उदाहरणार्थ,

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (iii) $xdx + ydy = 0$

(iv) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ (vi) $y = \dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

32.2 अवकल समीकरण की कोटि (क्रम) तथा घात

कोटि : अवकल समीकरण की कोटि उस समीकरण में आने वाले सबसे बड़े अवकलज की कोटि होती है।

घात : यह अवकल समीकरण में सबसे बड़ी कोटि वाले अवकलज की घात होती है।

उदाहरणार्थ,

	अवकल समीकरण	क्रम (कोटि)	घात
(i)	$\dfrac{dy}{dx} = \sin x$	एक	एक
(ii)	$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 3y^2 = 5x$	एक	दो
(iii)	$\left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + t^2\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^4 = 0$	दो	दो
(iv)	$\dfrac{d^3v}{dr^3} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dv}{dr} = 0$	तीन	एक
(v)	$\left(\dfrac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + x^3\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^5 = \sin x$	चार	दो

उदाहरण 32.1. निम्न अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0$$

हल : दिया है, $$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0$$

i.e. $$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0.$$

अत: अवकल समीकरण का क्रम दो है तथा घात एक हैं।

टिप्पणी: अवकल समीकरण की घात तभी परिभाषित होती है यदि वह समीकरण अवकलजों के संदर्भ में एक बहुपद समीकरण है।

32.3 रैखिक तथा अरैखिक अवकल समीकरण

ऐसे अवकल समीकरण को जिस में आश्रित चर तथा उस के सभी अवकलज की घात एक है और उनका परस्पर गुणा भी नहीं है, रैखिक अवकल समीकरण कहते हैं। जो अवकल समीकरण रैखिक नहीं हैं वे अरैखिक समीकरण कहलाते हैं।

उदाहरणार्थ, अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \text{ तथा } \cos^2 x\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}+y=0 \text{ रैखिक हैं।}$$

अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y}{x}=\log x$ अरैखिक है क्योंकि $\frac{dy}{dx}$ की घात दो है।

पुन:, अवकल समीकरण $y\frac{d^2y}{dx^2}-4=x$ रैखिक नहीं हैं क्योंकि आश्रित चर y तथा इसके अवकलज $\frac{d^2y}{dx^2}$ का परस्पर गुणा है।

32.4 अवकल समीकरण बनाना

मूल बिन्दु से जाने वाली सभी सरल रेखाओं के परिवार पर विचार कीजिए (चित्र 32.1)

रेखाओं के परिवार को

$$y=mx \quad .....(1)$$

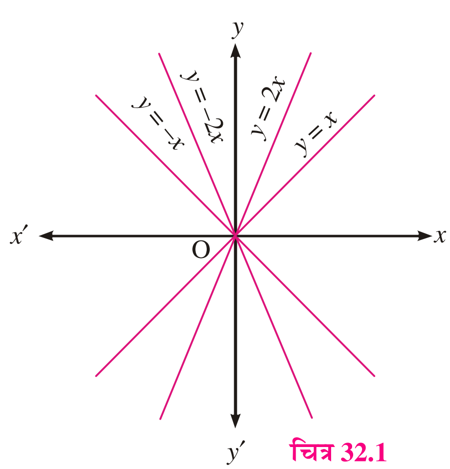
से प्रदर्शित किया जा सकता है।

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx}=m \quad .....(2)$$

(1) तथा (2) से हमें, प्राप्त हुआ

$$y=x\frac{dy}{dx} \quad .....(3)$$



चित्र 32.1

अतः $y = mx$ तथा $y = x\dfrac{dy}{dx}$ एक ही परिवार को प्रदर्शित करते हैं।

स्पष्टतः, समीकरण (3) एक अवकल समीकरण है।

कार्यकारी नियमः एक समीकरण जिसमें दो चर x तथा y हैं तथा कुछ स्वैच्छिक अचर जैसे a,b,c इत्यादि हैं, के संगत अवकल समीकरण बनाना।

(i) समीकरण को उतनी बार अवकलित करें जितनी संख्या स्वैच्छिक अचरों की उस में है।

(ii) इन समीकरणों से स्वैच्छिक अचरों का विलोपन करें।

टिप्पणीः यदि समीकरण में n स्वैच्छिक अचर हैं तो हमें एक n कोटि का अवकल समीकरण प्राप्त होगा।

उदाहरण 32.2. वक्रों के कुल को प्रदर्शित करने वाले समीकरण $y = ax^2 + .bx$ का अवकल समीकरण बनाइये।

हल :
$$y = ax^2 + bx \qquad \text{......(1)}$$

दोनों पक्षों को अवकलित करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 2\ ax + b \qquad \text{......(2)}$$

(2) को पुनः अवकलित करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\ a \qquad \text{......(3)}$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \text{......(4)}$$

(समीकरण में दो स्वैच्छिक अचर हैं, अतः हमने, इस समीकरण को दो बार अवकलित किया है और अब 'a' और 'b' का विलोपन करना है)

'a' का मान समीकरण (2) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = x\,\frac{d^2y}{dx^2} + b$$

$$\Rightarrow \qquad b = \frac{dy}{dx} - x\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

'a' और 'b' के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = x^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

या
$$y = \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

या $$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

या $$\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

उदाहरण 32.3. वक्रों के कुल को प्रदर्शित करने वाले समीकरण $y = a\cos(x+b)$ का अवकल समीकरण बनाइये।

हल : $$y = a\cos(x + b) \qquad .....(1)$$

दोनों पक्षों को अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b) \qquad ....(2)$$

पुनः अवकलित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \qquad ....(3)$$

(1) और (3) से, $$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

अर्थात् $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ प्राप्त हुआ।

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

उदाहरण 32.4. उन सभी वृत्तों का, जो मूल बिन्दु से होकर जाते हैं तथा जिनके केन्द्र x-अक्ष पर हैं, अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि वृत्तों के केन्द्र x-अक्ष पर हैं, अतः इस केन्द्र का निर्देशांक (a, 0) होगा।
क्योंकि वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाते हैं, अतः त्रिज्या a है।

तब समीकरण $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ होगा। (1)

संगत अवकल समीकरण ज्ञात करने के लिए, हम समीकरण (1) को अवकलित करते हैं और हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2(x-a) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $$x - a + y\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $$a = y\frac{dy}{dx} + x$$

समीकरण (1) में 'a' का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\left(x - y\frac{dy}{dx} - x\right)^2 + y^2 = \left(y\frac{dy}{dx} + x\right)^2$$

अथवा
$$\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$$

अथवा
$$y^2 = x^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$$

यही अभीष्ट अवकल समीकरण है।

टिप्पणी: यदि समीकरण में एक स्वैच्छिक अचर है, तो संगत अवकल समीकरण प्रथम क्रम का है तथा यदि समीकरण में दो स्वैच्छिक अचर हैं तो संगत अवकल समीकरण का क्रम दो है।

देखें आपने कितना सीखा 32.1

1. अवकल समीकरण $y = x\frac{dy}{dx} + 1$ की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए।

2. निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि तथा घात लिखिये :

   (a) $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ (b) $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 4 = 0$

3. बताइए कि निम्नलिखित अवकल समीकरण रैखिक है अथवा अरैखिक :

   (a) $\left(xy^2 - x\right)dx + \left(y - x^2y\right)dy = 0$ (b) $dx + dy = 0$

   (c) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (d) $\frac{dy}{dx} + \sin^2 y = 0$

4. 'a' तथा 'b' का विलोपन करके $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ का संगत अवकल समीकरण बनाइए।

5. (a) $y^2 = m\left(a^2 - x^2\right)$ का संगत अवकल समीकण बनाइए।

   (b) $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ का संगत अवकल समीकरण बनाइए, जबकि a स्वैच्छिक अचर है।

   (c) वक्रों के परिवार $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ के संगत अवकल समीकरण बनाइए जहां A तथा B स्वैच्छिक अचर हैं।

   (d) उन सभी सरल रेखाओं का अवकल समीकरण बनाइए जो (3, 2) से होकर जाती हैं।

   (e) उन सभी वृत्तों का अवकल समीकरण बनाइए जो मूल बिन्दु से होकर जाते हैं तथा जिनके केन्द्र y-अक्ष स्थित पर हैं।

32.5 व्यापक तथा विशिष्ट हल

अवकल समीकरण का हल प्रतिलोम प्रक्रिया है। यहाँ हम ऐसा समीकरण प्राप्त करने का प्रयत्न करते हैं, जिसका अवकलन करने पर तथा अचरों का विलोपन करने पर हमें दी गई अवकल समीकरण प्राप्त हो। इस प्रकार प्राप्त समीकरण को **आद्य** या अवकल समीकरण का **हल** करते हैं।

टिप्पणी

1. यदि हम आद्य को अवकलित करते हैं तो हमें अवकल समीकरण प्राप्त होता है। यदि हम अवकल समीकरण का समाकलन करते हैं तो हमें आद्य प्राप्त होता है।
2. अवकल समीकरण का हल अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

उदाहरण 32.5. दर्शाइए कि $y=C_1 \sin x + C_2 \cos x$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल है जहां C_1 तथा C_2 स्वैच्छिक अचर है।

हल : $$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \qquad .....(1)$$

(1) को अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cos x - C_2 \sin x \qquad .....(2)$$

पुनः अवकलित करने पर हमें

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

दिये गये अवकल समीकरण में $\frac{d^2y}{dx^2}$ तथा y का मान प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + (-C_1 \sin x - C_2 \cos x)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

समाकलन में स्वैच्छिक अचरों का महत्वपूर्ण स्थान है। अचरों के भिन्न मानों के लिए अवकल समीकरण के भिन्न हल हमें प्राप्त होते हैं। जिस हल में अवकल समीकरण की कोटि के समान स्वैच्छिक अचर रहते हैं उसे **व्यापक हल** कहते हैं।

यदि हम अचरों को विशिष्ट मान देते हैं, तो हल **विशिष्ट हल** कहलाता है।

टिप्पणी: व्यापक हल में स्वैच्छिक अचरों की संख्या अवकल समीकरण की कोटि के बराबर होती है।

उदाहरण 32.6. दर्शाइए कि $y = cx + \frac{a}{c}$ (जहां c अचर है) अवकल समीकरण $y = x\frac{dy}{dx} + a\frac{dx}{dy}$ का एक हल है।

हल : दिया है $y = cx + \frac{a}{c}$ .....(1)

(1) का अवकलन करने पर प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{c}$$

अवकल समीकरण के दाएँ पक्ष में $\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{dx}{dy}$ का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$x(c) + a\left(\frac{1}{c}\right) = cx + \frac{a}{c} = y$$

अर्थात् दायाँ पक्ष = बायाँ पक्ष

अतः दिए गए अवकल समीकरण का $y = cx + \frac{a}{c}$ एक हल है।

उदाहरण 32.7. यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - 6x = 0$ का व्यापक हल $y = 3x^2 + c$ है तो विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब $y = 3$ तब $x = 2$ हो।

हल : अवकल समीकरण का व्यापक हल $y = 3x^2 + c$ है,

अब इस समीकरण में $y = 3, x = 2$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$3 = 12 + c \text{ अथवा } c = -9$$

c का मान व्यापक हल में रखने पर हमें प्राप्त होता है:

$$y = 3x^2 - 9$$

यही अभीष्ट विशिष्ट हल है।

32.6 अवकल समीकरण को हल करने की विधियाँ

32.6.1 जब चरों को पृथक किया जा सके

(i) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ प्रकार के अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ अथवा $dy = f(x)\,dx$ प्रकार के अवकल समीकरण पर विचार करें।

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त हुआ

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

या

$$y = \int f(x)\,dx + c$$

जहां c स्वैच्छिक अचर है। यही दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

टिप्पणी: व्यापक हल में c का लिखना आवश्यक है, अन्यथा यह विशिष्ट हल बन जायेगा।

उदाहरण 32.8. $(x+2)\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 5$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है : $(x+2)\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 5$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 4x - 5}{x+2}$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 4x + 4 - 4 - 5}{x+2}$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)^2}{x+2} - \frac{9}{x+2}$ या $\frac{dy}{dx} = x + 2 - \frac{9}{x+2}$

या $$dy = \left(x + 2 - \frac{9}{x+2}\right)dx \qquad .....(1)$$

(1) के दोनों पक्षों को समाकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int dy = \int\left(x + 2 - \frac{9}{x+2}\right)dx$$

या $y = \frac{x^2}{2} + 2x - 9\log|x+2| + c$ जहाँ c स्वैच्छिक अचर है।

यही अभीष्ट व्यापक हल है।

उदाहरण 32.9. $\frac{dy}{dx} = 2x^3 - x$ को हल कीजिए, दिया है कि जब $x = 0$ तो $y = 1$

हल : दिया गया अवकल समीकरण है : $\frac{dy}{dx} = 2x^3 - x$

या $$dy = \left(2x^3 - x\right)dx \qquad ...(1)$$

(1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$\int dy = \int\left(2x^3 - x\right)dx$ या $y = 2.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c$

या $y = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + c$ प्राप्त होता है .....(2)

क्योंकि $y = 1$ तथा $x = 0$

$\therefore$ यदि हम इन मानों को (2) में रखें तो हमें प्राप्त होता है :

$$1 = 0 - 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 1$$

पुनः c के मानों को (2) में रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$y = \frac{1}{2}\left(x^4 - x^2\right) + 1$$

या $y = \frac{1}{2}x^2\left(x^2 - 1\right) + 1$ जो अभीष्ट विशिष्ट हल है।

(ii) $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$ के प्रकार के अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx} = f\ (x)\cdot g(y)$ या $\frac{dy}{g(y)} = f\ (x)\ dx$ के प्रकार के अवकल समीकरण पर विचार करें।..(1)

समीकरण (1) में x तथा y के पद परस्पर अलग हो जाते हैं। अतः ऐसे समीकरण **चर पृथक्की अवकल समीकरण** कहलाते हैं।

ऐसे अवकल समीकरण को हल करने के लिए हम दोनों तरफ का समाकलन करते हैं तथा एक तरफ स्वैच्छिक अचर जोड देते हैं।

आइए हम कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 32.10. अवकल समीकरण $\left(1+x^2\right)dy = \left(1+y^2\right)dx$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है, $\left(1+x^2\right)dy = \left(1+y^2\right)dx$ जिसको निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{...(यहाँ चरों को पृथक कर दिया जाता है)} \qquad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों को समाकलित करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

या $\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$ जहाँ c, स्वैच्छिक अचर है। यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण 32.11. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1}$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y(0)=3$ अर्थात जब $x=0, y=3$

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण निम्न है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1}$$

या $$\left(3y^2+1\right)dy = 2x\ dx \qquad (1)$$

यदि (1) के दोनों पक्षों को समाकलित करें तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

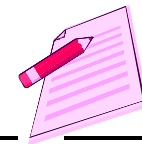
$$\int\left(3y^2+1\right)dy = \int 2x\ dx + c,$$

$$y^3 + y = x^2 + c \qquad \text{जहाँ } c\text{, स्वैच्छिक अचर है।} \qquad (2)$$

यह दिया गया है कि $y(0) = 3$

$y = 3$ जब $x = 0$, (2) में रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$27 + 3 = c$$



$\therefore \qquad c = 30$

अतः अभीष्ट विशिष्ट हल है

$$y^3 + y = x^2 + 30$$

32.6.2 समघातीय अवकल समीकरण

निम्न अवकल समीकरणों पर विचार करें :

(i) $y^2 + x^2 \dfrac{dy}{dx} = xy \dfrac{dy}{dx}$ (ii) $\left(x^3 + y^3\right)dx - 3xy^2dy = 0$ (iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + xy^2}{y^2x}$

समीकरण (i) में, हम देखते हैं कि प्रत्येक पद की घात 2 है। [जैसे y^2 की घात 2 है, x^2 की घात 2 है तथा xy की घात 1+1=2 है]

समीकरण (ii) में, प्रत्येक पद की घात 3 है।

समीकरण (iii) में, प्रत्येक पद की घात 3 है।

ऐसे समीकरणों को **समघातीय समीकरण** कहा जाता है।

टिप्पणी: समघातीय समीकरण में अचर नहीं होते।

उदाहरण के लिए, अवकल समीकरण $\left(x^2 + 3yx\right)dx - \left(x^3 + x\right)dy = 0$ समघातीय समीकरण नहीं हैं क्योंकि प्रत्येक पद की घात समान नहीं है। x^2 की घात 2 है, $3xy$ की घात 2 है, x^3 की 3 है, x की 1 है।

32.6.3 समघातीय अवकल समीकरण के हल

ऐसे समीकरण के हल के लिए

(i) एक चर y को vx या चर x को vy मान लीजिए जहाँ v भी एक चर है।

(ii) अवकल समीकरण में $y = vx$ (या $x = vy$) लिखिए। और इस प्रकार से प्राप्त अवकल समीकरण पृथक्की अवकल समीकरण हो जायेगा।

(iii) इस समीकरण को अब वैसे ही हल करें जैसे कि आपने पहले हल किया है।

उदाहरण 32.12. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2dy = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है :

$$\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2dy = 0$$

या
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} \qquad .....(1)$$

यह दो घात का समघातीय समीकरण है। $y = vx$ लिखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$\therefore$ (1) से,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + 3x.vx + (vx)^2}{x^2} \quad \text{या} \quad v + x\frac{dv}{dx} = x^2\left[\frac{1 + 3v + v^2}{x^2}\right]$$

या $\qquad v + x\dfrac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2 \qquad$ या $\qquad x\dfrac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2 - v$

या $\qquad x\dfrac{dv}{dx} = v^2 + 2v + 1 \qquad$ या $\qquad \dfrac{dv}{v^2 + 2v + 1} = \dfrac{dx}{x}$

या $\qquad \dfrac{dv}{(v+1)^2} = \dfrac{dx}{x} \qquad$ .....(2)

(2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{-1}{v+1} + c = \log|x| \text{ जहाँ } c \text{, स्वैच्छिक अचर है।}$$

इसमें v का मान रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{x}{y+x} + \log|x| = c \text{ जहाँ } c \text{, स्वैच्छिक अचर है।}$$

जो दिए हुए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

टिप्पणीः यदि समघातीय समीकरण को $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ के रूप में लिखा जाए तो $x = vy$ प्रतिस्थापित करके हल ज्ञात किया जाता है

32.6.4 $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ के प्रकार के अवकल समीकरण, जहाँ P तथा Q, केवल x के फलन हैं।

समीकरण $\qquad \dfrac{dy}{dx} + Py = Q \qquad$ .....(1)

पर विचार करें जहां P तथा Q,x के फलन हैं। यह कोटि एक का रैखिक समीकरण है।

समीकरण (1) को हल करने के लिए हम (1) के दोनों पक्षों को $e^{\int Pdx}$ (जिसे समाकलन गुणक कहा जाता है) से गुणा करते हैं। इस प्रकार हमें निम्न प्राप्त होता है

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + Py\, e^{\int Pdx} = Qe^{\int Pdx}$$

या $\qquad \dfrac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right) = Qe^{\int Pdx} \qquad$ .....(2)

$$\left[\because \frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right) = e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + Py.e^{\int Pdx}\right]$$

समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + c \qquad .....(3)$$

या
$$y = e^{-\int P dx}\left[\int Qe^{\int P dx} dx + c\right]$$

टिप्पणी 1

$e^{\int Pdx}$ को समीकरण का समाकलन गुणक कहते हैं और संक्षेप में इसे I.F. लिखा जाता है।

टिप्पणी 2

(i) हम ने देखा कि रैखिक अवकल समीकरण (1) का बायाँ पक्ष $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right)$ बन जाता है जब हम इसे $e^{\int P dx}$ से गुणा करते हैं।

(ii) रैखिक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का हल $ye^{\int P dx} = \int Q\left(e^{\int P dx}\right) dx + c$ है जहां P तथा Q केवल x के फलन है।

(iii) यदि $\frac{dy}{dx}$ का गुणांक 1 नहीं है तो समीकरण को इस से भाग देकर गुणांक 1 बना लेना चाहिए।

(iv) कुछ समीकरण ऐसे पाए जाते हैं, जहां y का व्यवहार, स्वतन्त्र चर की तरह और x आश्रित चर की तरह, होता है।

$\frac{dx}{dy} + Px = Q$ रैखिक अवकल समीकरण है जहां P तथा Q केवल y के फलन हैं।

इस स्थिति में, $\text{I.F.} = e^{\int P dy}$

और हल $x(\text{I.F.}) = \int Q.(\text{I.F.})dy + c$ है।

उदाहरण 32.13. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{-x}$ को हल कीजिए।

हल : यहां $P = \frac{1}{x}, Q = e^{-x}$ [देखिये कि P तथा Q दोनों x के फलन हैं।]

समाकलन गुणक $e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x \qquad (x > 0)$

अत: दिए हुए समीकरण का हल है:

$$yx = \int xe^{-x} dx + c \quad \text{जबकि } c \text{ स्वैच्छिक अचर है।}$$

या $\quad xy = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx + c \qquad$ या $\quad xy = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

या $\quad xy = -e^{-x}(x+1) + c \qquad$ या $\quad y = -\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x} + \frac{c}{x}$

नोट : हल में $x > 0$ है।

उदाहरण 32.14. $\sin x \dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 2\sin^2 x \cos x$ को हल कीजिए।

हल : दिया है $$\sin x \frac{dy}{dx} + y\cos x = 2\sin^2 x \cos x$$

या $$\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\sin x \cos x \qquad .....(1)$$

यहां $$P = \cot x, Q = 2\sin x \cos x$$

$$\text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{\int \cot x dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

अतः दिए हुए समीकरण का हल है:

$$y \sin x = \int 2\sin^2 x \cos x \, dx + c,$$ जहाँ कि c स्वैच्छिक अचर है।

या $$y\sin x = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$

जो अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 32.15. $\left(1+y^2\right)\dfrac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$ को हल कीजिए।

हल : दिया गया अवकल समीकरण है :

$$\left(1+y^2\right)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$$

या $$\frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2}$$

या $$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad ....(1)$$

जिस का रूप $\dfrac{dx}{dy} + Px = Q$ है, जहां P तथा Q,y के फलन हैं।

$$\text{I.F.} = e^{\int P dy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

अतः दिए हुए समीकरण का हल है:

$$x.e^{\tan^{-1} y} = \int \frac{(\tan^{-1} y)}{1+y^2} e^{\tan^{-1} y}.dy + c$$

मान लीजिए $t = \tan^{-1} y$ इसलिए $dt = \dfrac{1}{1+y^2} dy$

$\therefore$ $$\left(e^{\tan^{-1} y}\right) x = \int e^t.tdt + c$$ जबकि c स्वैच्छिक अचर है।

या $\left(e^{\tan^{-1} y}\right) x = te^t - \int e^t + c$

या $\left(e^{\tan^{-1} y}\right) x = te^t - e^t + c$

या $\left(e^{\tan^{-1} y}\right) x = \tan^{-1} y \, e^{\tan^{-1} y} - e^{\tan^{-1} y} + c$ $(t = \tan^{-1} y$ रखने पर)

या $x = \tan^{-1} y - 1 + ce^{-\tan^{-1} y}$

देखें आपने कितना सीखा 32.2

1. (i) क्या $y = \sin x$, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का एक हल है?

   (ii) क्या $y = x^3$, अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ का एक हल है?

2. समीकरण $\frac{dy}{dx} = 3x$ के कुछ हल नीचे दिए गये हैं। बताइए कि उनमें कौन से विशिष्ट हल तथा कौन से व्यापक हल है?

   (i) $2y = 3x^2$ (ii) $y = \frac{3}{2}x^2 + 2$

   (iii) $2y = 3x^2 + C$ (iv) $y = \frac{3}{2}x^2 + 3$

3. बताइए कि क्या निम्नलिखित अवकल समीकरण समघातीय हैं अथवा नहीं?

   (i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$ (ii) $\left(3xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + xy\right)dy = 0$

   (iii) $(x + 2)\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 9$ (iv) $\left(x^3 - yx^2\right)dy + \left(y^3 + x^3\right)dx = 0$

4. (a) दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ का एक हल $y = a \sin 2x$ है।

   (b) सत्यापित कीजिए कि $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$ का एक हल $y = x^3 + ax^2 + c$ है।

5. $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$ का व्यापक हल, $y = \tan x + c$ है। विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब

   (a) $x = \frac{\pi}{4}, y = 1$ (b) $x = \frac{2\pi}{3}, y = 0$

6. निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

   (a) $\frac{dy}{dx} = x^5 \tan^{-1}\left(x^3\right)$ (b) $\frac{dy}{dx} = \sin^3 x \cos^2 x + xe^x$

   (c) $\left(1 + x^2\right)\frac{dy}{dx} = x$ (d) $\frac{dy}{dx} = x^2 + \sin 3x$

7. $e^x \dfrac{dy}{dx} = 4$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब दिया है कि $y=3$ जब $x=0$

8. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\left(x^2 - yx^2\right)\dfrac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$

(c) $\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + e^{-y}x^2$

9. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xy\, dy = 0$ (b) $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2}{x} = y$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$ (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$

10. $\dfrac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x$ को हल कीजिए ।

11. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\left(1 + x^2\right)\dfrac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$ (b) $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

(c) $x \log x \dfrac{dy}{dx} + y = 2\log x,\ x > 1$

12. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $(x + y + 1)\dfrac{dy}{dx} = 1$

[संकेत: $\dfrac{dx}{dy} = x + y + 1$ या $\dfrac{dx}{dy} - x = y + 1$ का रूप $\dfrac{dx}{dy} + Px = Q$ है]

(b) $\left(x + 2y^2\right)\dfrac{dy}{dx} = y,\ y > 0$ [संकेत: $y\dfrac{dx}{dy} = x + 2y^2$ या $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} = 2y$]

32.7 अवकल समीकरण से संबधित कुछ अन्य उदाहरण

उदाहरण 32.16. सत्यापित कीजिए कि $\left(1 - x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - m^2y = 0$ का हल $y = e^{m\sin^{-1}x}$ है।

हल : दिया गया है कि

$$y = e^{m\sin^{-1}x} \qquad .....(1)$$

x के सापेक्ष (1) का अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{me^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{my}{\sqrt{1 - x^2}}$$

या $$\sqrt{1 - x^2}\,\frac{dy}{dx} = my$$

दोनों पक्षों में वर्ग करने पर, $\left(1-x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2y^2$

दोनों पक्षों का अवकलन करने पर,

$$-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 2m^2y\frac{dy}{dx}$$

या $-x\frac{dy}{dx} + \left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} = m^2y$ या $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$

अतः, दिया हुआ सम्बन्ध $y = e^{m\sin^{-1}x}$

$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$ का हल है।

उदाहरण 32.17. $(y - yx)dx + (x + xy)dy = 0$ द्वारा प्रदर्शित वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिएं जो बिन्दु (1,1) से होकर जाता है।

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण है :

$$(y - yx)dx + (x + xy)dy = 0$$

या $\quad (x + xy)dy = (yx - y)dx$

या $\quad x(1 + y)dy = y(x - 1)dx$

या $\quad \frac{(1+y)}{y}dy = \frac{x-1}{x}dx \qquad .....(1)$

(1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int\left(\frac{1+y}{y}\right)dy = \int\left(\frac{x-1}{x}\right)dx$$

या $\quad \int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy = \int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx \qquad .....(2)$

या $\quad \log y + y = x - \log x + c$

चूंकि वक्र (1, 1) बिन्दु से होकर जाता है, इसलिए

समीकरण (2) में $x = 1, y = 1$ रखने पर,

$$1 = 1 + c \text{ या } c = 0$$

अतः अभीष्ट वक्र का समीकरण है

$$\log y + y = x - \log x \text{ या } \log(xy) = x - y$$

उदाहरण 32.18. $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$ को हल कीजिए।

हल: दिया है कि $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^x + e^{-x}}$

या $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3e^{3x}\left(e^{-x} + e^{x}\right)}{e^{x} + e^{-x}}$ या $\quad \dfrac{dy}{dx} = 3e^{3x}$

या $\quad dy = 3e^{3x}dx$ .....(1)

(1) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$y = \int 3e^{3x}dx + c,$$ जहाँ कि c एक स्वैच्छिक अचर है।

या $\quad y = 3\dfrac{e^{3x}}{3} + c$ या $\quad y = e^{3x} + c$

जो समीकरण का अभीष्ट हल है।

देखें आपने कितना सीखा 32.3

1. (a) यदि $y = \tan^{-1}x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\left(1 + x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0$

   (b) यदि $y = e^{x}\sin x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

2. (a) $\dfrac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$ द्वारा प्रदर्शित वक्र, जो बिन्दु $(2, 0)$ से होकर जाता है, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

   (b) $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$ द्वारा प्रदर्शित वक्र, जो बिन्दु $\left(\dfrac{\pi}{2}, 2\right)$ से होकर जाता है, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4e^{3x} + 4e^{5x}}{e^{x} + e^{-x}}$ को हल कीजिए।

4. (a) $dx + xdy = e^{-y}\sec^2 y\,dy$ को हल कीजिए।

   (b) $\left(1 + x^2\right)\dfrac{dy}{dx} - 4x = 3\cot^{-1}x$ को हल कीजिए।

   (c) $(1 + y)\,xy\,dy = \left(1 - x^2\right)(1 - y)\,dx$ को हल कीजिए।

आइये दोहराएँ

- अवकल समीकरण ऐसा समीकरण होता है जिस में स्वतन्त्र चर, आश्रित चर तथा स्वतन्त्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के भिन्न भिन्न अवकलज सम्बद्ध होते हैं।
- अवकल समीकरण की कोटी उस समीकरण में आने वाले अधिकतम अवकलज की कोटि होती है।
- एक अवकल समीकरण की घात उस समीकरण में अधिकतम कोटि वाले अवकलज की घात होती है।

- अवकल समीकरण की घात तभी परिभाषित होती है यदि वह समीकरण अवकलजों के संदर्भ में एक बहुपद समीकरण है।
- जिस अवकल समीकरण में आश्रित चर तथा इसके अवकलज की घात केवल एक (1) पाई जाए तथा उनका परस्पर गुणा न हो, ऐसे अवकल समीकरण को रैखिक अवकल समीकरण कहते हैं।
- रैखिक अवकल समीकरण प्रथम घात का होता है।
- अवकल समीकरण का व्यापक हल ऐसा हल होता है जिस में स्वैच्छिक अचरों की संख्या अवकल समीकरण के कोटि के बराबर होती है।
- व्यापक हल, विशिष्ट हल तब बन जाता है जब कि दिए हुए प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करने वाले स्वैच्छिक अचरों के विशिष्ट मान निर्धारित हो जाते हैं।
- $\frac{dy}{dx} = f(x)$ के प्रकार के अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने के लिए, उसके दोनो पक्षों को x के सापेक्ष समाकलित करते हैं।
- $\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$ के प्रकार के अवकल समीकरण का हल चरों को पृथक कर के और दोनों पक्षों का समाकलन करके प्राप्त किया जाता है।
- अवकल समीकरण $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ को समघातीय कहा जाता है यदि $M(x, y)$ तथा $N(x, y)$ समघातीय है।
- समघातीय अवकल समीकरण का हल $y = vx$ अथवा $x = vy$ प्रतिस्थापित करके तब चरों को पृथक करके, निकाला जाता है।
- प्रथम कोटि के रैखिक समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ का हल

  $ye^{\int P dx} = \int Q\left(e^{\int P dx}\right) dx + c$ है जबकि c एक स्वैच्छिक अचर है।
- व्यंजक $e^{\int P dx}$ को अवकल समीकरण का समाकलन गुणक कहते हैं। संक्षेप में इसे I.F. लिखा जाता है।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=LloXYtsHyK4*
- *https://www.youtube.com/watch?v=arYcc6IQ-WU*

आइए अभ्यास करें

1. अवकल समीकरण की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए:

(a) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ (b) $xdx + ydy = 0$

(c) $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 5\cos 3x$ (d) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

(e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - xy\frac{dy}{dx} = y$ (f) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

2. ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरणों में कौन से रैखिक तथा कौन से अरैखिक हैं :

(a) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \log x$

(c) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (d) $x\frac{dy}{dx} - 4 = x$

(e) $dx + dy = 0$

3. a का विलोपन करते हुए $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ के संगत अवकल समीकरण बनाइए। इस की कोटि तथा घात लिखिए।

4. a,b,c का विलोपन करते हुए $y = ax^2 + bx + c$ से अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। इसकी कोटि तथा घात लिखिए।

5. निम्न के व्यापक हल में कितने अचर होंगे ?

(a) द्विकोटि का अवकल समीकरण।

(b) तृतीय कोटि का अवकल समीकरण

(c) पांच कोटि का अवकल समीकरण

6. दर्शाइए कि अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ का हल

$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ है।

7. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $\sin^2 x\frac{dy}{dx} = 3\cos x + 4$ (b) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$

(c) $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x \sin y}{\cos y} = 0$ (d) $dy + xydx = xdx$

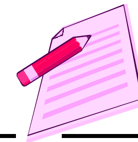
(e) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = x^m \cos mx$ (f) $\left(1 + y^2\right)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 32.1

1. कोटि 1, घात 1

2. (a) कोटि 2, घात 1 (b) कोटि 2, घात 2



3. (a) अरैखिक (b) रैखिक

(c) रैखिक (d) अरैखिक

4. $\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = r^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

5. (a) $xy\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - y\dfrac{dy}{dx} = 0$ (b) $\left(x^2 - 2y^2\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\dfrac{dy}{dx} - x^2 = 0$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$ (d) $y = (x-3)\dfrac{dy}{dx} + 2$

(e) $(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$

देखें आपने कितना सीखा 32.2

1. (i) हाँ (ii) नहीं

2. (i), (ii) तथा (iv) विशिष्ट हल (iiii) विशिष्ट हल

3. (ii) (iv) समघातीय

5. (a) $y = \tan x$ (b) $y = \tan x + \sqrt{3}$

6. (a) $y = \dfrac{1}{6}x^6 \tan^{-1}\left(x^3\right) - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{6}\tan^{-1}\left(x^3\right) + c$

(b) $y = \dfrac{1}{5}\cos^5 x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x + (x-1)e^x + c$

(c) $y = \dfrac{1}{2}\log\left|x^2 + 1\right| + c$ (d) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}\cos 3x + c$

7. $y = -4e^{-x} + 7$

8. (a) $\log\left|\dfrac{x}{y}\right| = c + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ (b) $\log|y+1| = x + \dfrac{x^2}{2} + c$

(c) $\tan x \tan y = c$ (d) $e^y = e^x + \dfrac{x^3}{3} + c$

9. (a) $x = c\left(x^2 - y^2\right)$

(b) $x + cy = y \log | x |$

(c) $\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \log | x | + c$

(d) $\tan\dfrac{y}{2x} = cx$

10. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c$

11. (a) $y = \tan^{-1} x - 1 + ce^{-\tan x}$

(b) $y = \tan x - 1 + ce^{-\tan x}$

(c) $y = \log x + \dfrac{c}{\log x}$

12. (a) $x = ce^{y} - (y+2)$ (b) $x = y^2 + cy$

देखें आपने कितना सीखा 32.3

2. (a) $\log(y+1) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 4$

   (b) $y \sin x + 5e^{\cos x} = 7$

3. $y = \dfrac{4}{5}e^{5x} + c$

4. (a) $x = e^{-y}(c + \tan y)$

   (b) $y = 2\log|1+x^2| - \dfrac{3}{2}(\cot^{-1} x)^2 + c$

   (c) $\log x + 2\log|1-y| = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} - 2y + c$

आइए अभ्यास करें

1. (a) कोटि 2, घात 3 (b) कोटि 1, घात 1

   (c) कोटि 4, घात 1 (d) कोटि 1, घात 1

   (e) कोटि 2, घात 1 (f) कोटि 2, घात 1

2. (a), (d), (e) रैखिक, (b), (c) अरैखिक

3. $\left(x^2 - 2y^2\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\left(\dfrac{dy}{dx}\right) - x^2 = 0$

4. . $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$; कोटि 3, घात 1

5. (a) दो (b) तीन (c) पाँच

7. (a) $y + 3\,\mathrm{cosec}\, x + 4\cot x = c$ (b) $e^{y} = e^{x} + \dfrac{x^3}{3} + c$

   (c) $\sin y = ce^{-\sin x}$ (d) $\log(1-y) + \dfrac{x^2}{2} = c$

   (e) $y = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\cos x + c\cos x$

   (f) $x = \tan^{-1} y - 1 + ce^{-\tan^{-1} y}$

33

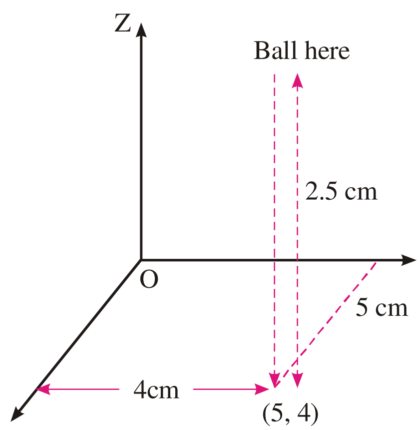
त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

पिछले पाठों में आपने पढ़ा है कि यदि समतल में एक बिन्दु दिया गया हो, तो दो संख्याओं, जो बिन्दु की स्थिति दर्शाते हैं, को ढूंढना सम्भव है जिन्हें समतल में बिन्दु के निर्देशांक कहते हैं। विलोमत: यदि एक क्रमित युग्म (x, y) दिया गया है, तो इसके संगत समतल में एक बिन्दु होगा जिस के निर्देशांक (x,y) हैं।

आइये एक कमरे में एक रबर की गेंद को उर्ध्वाधार स्थिति में गिराएं। फर्श के उस बिन्दु x,y जिस पर गेंद टकराती है, को कमरे की लम्बाई और चौड़ाई के अनुदिश अक्षों के संदर्भ में अद्वितीय रूप में ज्ञात किया जा सकता है। परन्तु यदि गेंद उर्ध्वाधार रूप में वापिस उछल कर उपर जाए, तो किसी क्षण पर आकाश में उस की स्थिति को दो अक्षों के संदर्भ में नहीं जाना जा सकता है। किसी क्षण पर गेंद की स्थिति को तभी जाना जा सकता है यदि दो अक्षों के साथ-साथ हम फर्श से गेंद की ऊँचाई भी जानते हों।

यदि फर्श से गेंद की ऊँचाई 2.5 सेमी हो तथा भूमि पर टकराने के स्थान वाले बिन्दु के निर्देशांक (5,4) हों, तो आकाश में गेंद की स्थिति को निर्धारित करने की एक विधि, तीन संख्याओं (5, 4, 2.5) की सहायता से उस बिन्दु को निरूपित करना है।

अत: आकाश में एक बिन्दु की स्थिति को तीन संख्याओं की सहायता से अद्वितीय रूप से निर्धारित किया जा सकता है। इस पाठ में हम निर्देशांक निकाय तथा आकाश में एक बिन्दु के निर्देशांकों, आकाश में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी, दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा खण्ड में दिये गए आन्तरिक/बाह्य अनुपात में विभाजन करने वाले बिन्दु की स्थिति तथा एक बिन्दु/रेखा आकाश में प्रक्षेप के बारे में विस्तार पूर्वक अध्ययन करेंगे।



चित्र 33.1

उद्देश्य

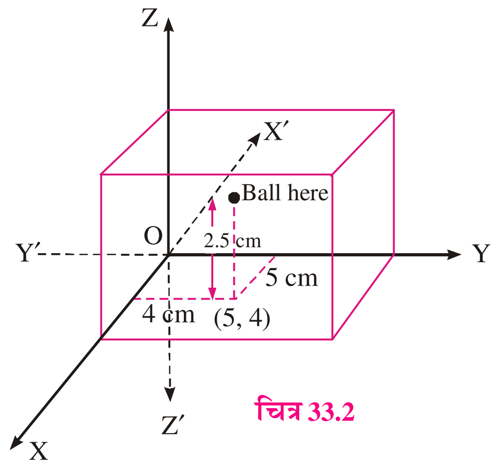
- इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :
- आकाश में एक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना
- आकाश में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ज्ञात करना
- दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रखाखण्ड को दिये गए अनुपात में आन्तरिक विभाजन, बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना
- आकाश में किसी रेखा के दिक कोसाइन/अनुपात को परिभाषित करना
- आकाश में एक रेखा के दिक कोसाइन/अनुपात ज्ञात करने में आकाश में एक रेखाखण्ड का दूसरी रेखा पर प्रक्षेप ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- द्विविम निर्देशांक ज्यामिति
- त्रिकोणमिति के मूल सिद्धान्त

33.1 निर्देशांक निकाय और आकाश में एक बिन्दु के निर्देशांक

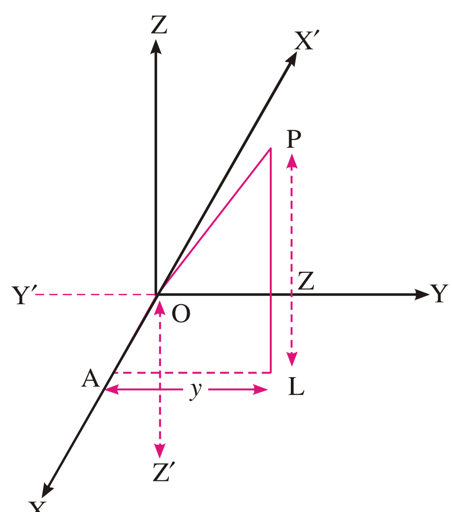
उछलती हुई गेंद का उदाहरण याद कीजिए जिस में कमरे का एक कोना मूल बिन्दु लिया गया था।



चित्र 33.2

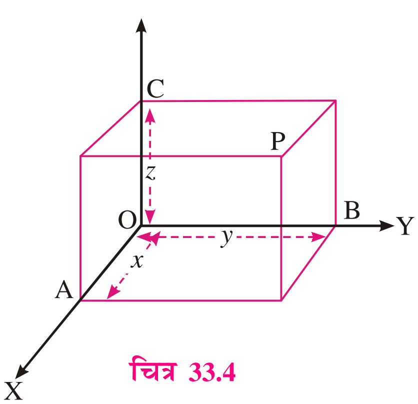
यह आवश्यक नहीं कि हम कमरे के एक विशेष कोने को मूल बिन्दु लें। हम किसी भी कोने को (यहाँ तक कि कमरे में किसी भी बिन्दु को) संदर्भ के लिए मूल बिन्दु ले सकते हैं तथा इस के अनुसार बिन्दु के निर्देशांक बदल जाते हैं। अतः कमरे में किसी भी स्वैच्छिक बिन्दु को हम मूल बिन्दु ले सकते हैं।

आइए हम आकाश में एक बिन्दु O लें तथा इसमें से तीन पारस्परिक लम्ब रेखाएँ X'OX,Y'OY और Z'OZ लें। इन्हें हम क्रमशः X-अक्ष, Y-अक्ष और Z-अक्ष कहते हैं। तीर द्वारा अक्षों की धनात्मक दिखाएँ दिखाई गई हैं। X-अक्ष और Y-अक्ष द्वारा निर्धारित समतल XY समतल (XOY समतल) और इसी प्रकार YZ समतल (YOZ समतल) और ZX समतल (ZOX समतल) कहे जाते हैं। इन तीन समतलों को निर्देशांक समतल कहते हैं। तीन निर्देशांक समतल पूरे आकाश को आठ भागों में विभाजित करते हैं जिन्हें अष्टांशक कहते हैं।



चित्र 33.3

मान लीजिए कि आकाश में कोई बिन्दु P है। P से XY समतल पर PL लम्ब खींचिए जो उस समतल को मान लीजिए, L पर मिलता है। बिन्दु L से एक रेखा LA अक्ष OY के समान्तर खींचिए जो OX को A पर काटती है। यदि हम OA = x, AL = y और LP = z लिखें तो (x,y,z) बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं।



चित्र 33.4

पुनः यदि हम P में से समकोण समान्तर अषट्फलक को पूरा करें जिस के किनारे OA,OB और OC हैं जो एक दूसरे को O पर मिलते हैं

तथा OP इसका मुख्य विकर्ण है तब लम्बाइयाँ (OA, OB, OC) अर्थात् (x, y, z) बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं।

टिप्पणी: आप चित्र 33.4 में अवलोकर करें।

P का x-निर्देशांक = OA = P से YZ समतल पर लम्ब की लम्बाई

P का y- निर्देशांक = OB = P से ZX समतल पर लम्ब की लम्बाई

P का z- निर्देशांक = OC = P से XY समतल पर लम्ब की लम्बाई

अत: आकाश में किसी बिन्दु P के संगत एक त्रिक (x,y,z) है जो आकाश में बिन्दु के निर्देशांक कहलाते हैं। विलोमत: किसी दिये गए त्रिक (x,y,z) के संगत आकाश में एक बिन्दु P है जिस के निर्देशांक (x,y,z) हैं।

टिप्पणी

1. जैसे समतल निर्देशांक ज्यामिति में निर्देशांक अक्ष समतल को चार चर्तुथाशों में विभाजित करते हैं, इसी तरह त्रिविम ज्यामिति में, आकाश को निर्देशांक समतल आठ अष्टांशक में विभाजित करते हैं जिनके नाम हैं

   OXYZ, OX'YZ, OXY'Z, OXYZ',OXY'Z', OX'YZ',OX'Y'Z', और OX'Y'Z

2. यदि कोई बिन्दु P प्रथम अष्टांशक में, तो दूसरे प्रत्येक अष्टांशक में एक ऐसा बिन्दु होगा जिसकी निर्देशांक समतल से दूरियां उनके बिन्दु P की दूरी के बराबर होगी। यदि बिन्दु P (a,b,c) हो तो दूसरे बिन्दु क्रमश: होंगे (-a,b,c), (a,b,c), (a,b,-c), (a,-b-c),(-a,b,-c), (-a,-b,c) और (-a,-b,-c),उसी क्रम में जो क्रम ऊपर (i) में दिया गया है।

3. एक बिन्दु, जो XY-समतल, YZ-समतल तथा ZX-समतल में है, के निर्देशांक क्रमश: (a, b, o), (o, b, c) तथा (a, o, c) हैं।

4. X अक्ष Y-अक्ष और Z-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक क्रमश: (a,0,0), (0,b,0) और (0,0,c) है।

5. आप देख सकते हैं कि (x,y,z) बिन्दु P के स्थिति सदिश के संगत है जो सदिश OP मूल बिन्दु O के संदर्भ में हैं।

उदाहरण 33.1. निम्न बिन्दु किस किस अष्टांशक में स्थित है?

(a) $(2, 6, 8)$ (b) $(-1, 2, 3)$ (c) $(-2, -5, 1)$

(d) $(-3, 1, -2)$ (e) $(-6, -1, -2)$

हल:

(a) क्योंकि सभी निर्देशांक घनात्मक है

$\therefore$ $(2, 6, 8)$ अष्टांशक OXYZ में स्थित है।

(b) क्योंकि x ऋणात्मक है और y और z धनात्मक हैं

$\therefore$ $(-1, 2, 3)$अष्टांशक OX'YZ में स्थित है।

(c) क्योंकि x और y ऋणात्मक हैं और z धनात्मक है,

$\therefore$ (–2, –5, 1) अष्टांशक OX'Y'Z में स्थित है।

(d) (–3, 1, –2) अष्टांशक OX'YZ' में स्थित है।

(e) क्योंकि x,y और z सभी ऋणात्मक ह

$\therefore$ (–6, –1, –2) अष्टांशक OX'Y'Z' में स्थित है।

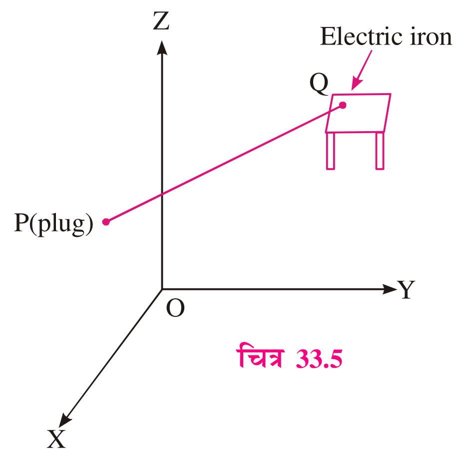
देखें आपने कितना सीखा 33.1

1. उन अष्टांशकों के नाम लिखिए जिन में निम्न बिन्दु स्थित है:

(a) (–4, 2, 5) (b) (4, 3, –6) (c) (–2, 1, –3)

(d) (1, –1, 1) (f) (8, 9, –10)

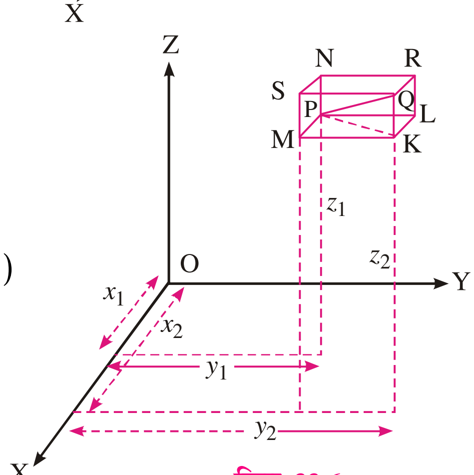
33.2 दो बिन्दुओं के बीच दूरी



चित्र 33.5

मान लीजिए कि कमरे की दीवार पर एक विद्युत प्रैस एक मेज़ पर रखी है। कितने न्यूनतम तार की आवश्यकता होगी जिससे प्रैस प्लग से जुड जाए? इस उदाहरण से हमें आकाश में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी को जानने की आवश्यकता हुई।

मान लीजिए कि बिन्दुओं P और Q के निर्देशांक क्रमश (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) हैं। PQ को विकर्ण मानकर समान्तर अष्टफलक PMSNRLKQ पूरा कीजिए। PK रेखा KQ पर लम्ब है।



चित्र 33.6

$\therefore$ समकोण Δ PKQ में $\angle K = 90°$

$$\therefore \quad PQ^2 = PK^2 + KQ^2$$

$\therefore$ पुनः समकोण Δ PKL में $\angle L = 90°$

$$\therefore PK^2 = KL^2 + PL^2 = MP^2 + PL^2 \, (\because KL = MP)$$

$$\therefore PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2 \qquad \text{...(i)}$$

MP, PL और KQ निर्देशांक अक्षों के समान्तर हैं।

$\therefore$ बिन्दु P की समतल YOZ से दूरी $= x_1$

तथा Q और M की समतल YOZ से दूरी $= x_2$ $MP = |x_2 - x_1|$

इसी प्रकार $PL = |y_2 - y_1|$ और $KQ = |z_2 - z_1|$

$$\therefore \quad PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \qquad \text{....[(i) से]}$$

या

$$|\mathbf{PQ}| = \sqrt{(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})^2 + (\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1})^2 + (\mathbf{z_2} - \mathbf{z_1})^2}$$

उपप्रमेयः एक बिन्दु की मूल बिन्दू से दूरी

यदि बिन्दु $Q(x_2, y_2, z_2)$ मूल बिन्दु $(0, 0, 0)$ के संपाती हो, तो $x_2 = y_2 = z_2 = 0$

$\therefore$ मूल बिन्दु से P की दूरी $\quad |OP| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2}$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

सामान्यतः बिन्दु $P(x, y, z)$ की मूल बिन्दु 0 से दूरी $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

उदाहरण 33.2. बिन्दुओं $(2, 5, -4)$ और $(8, 2, -6)$ के बीच दूरी ज्ञात कीजिए ।

हल : माना $P(2, 5, -4)$ और $Q(8, 2, -6)$ दिये गए बिन्दु हैं

$$\therefore \quad |PQ| = \sqrt{(8-2)^2 + (2-5)^2 + (-6+4)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 9 + 4}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

दिये हुए बिन्दुओं के बीच की दूरी 7 इकाई है।

उदाहरण 33.3. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(-2, 4, -3)$, $(4, -3, -2)$ और $(-3, -2, 4)$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : माना $A(-2, 4, -3), B(4, -3, -2)$ और $C(-3, -2, 4)$ दिये गये बिन्दु हैं।

$$\therefore \quad |AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (-3-4)^2 + (-2+3)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 49 + 1} = \sqrt{86}$$

$$|BC| = \sqrt{(-3-4)^2 + (-2+3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{86}$$

$$|CA| = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{86}$$

$$\therefore \quad |AB| = |BC| = |CA|$$

Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

उदाहरण 33.4. जांच कीजिए कि नीचे दिये गए हैं। बिन्दु एक त्रिभुज बनाते है या नहीं :

(a) $A(-1, 2, 3)$ $B(1, 4, 5)$ और $C(5, 4, 0)$

(b) $(2, -3, 3), (1, 2, 4)$ और $(3, -8, 2)$

हल : (a) $|AB| = \sqrt{(1+1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2}$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \quad = 3.464 \text{ लगभग}$$

$$|BC| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-4)^2 + (0-5)^2}$$

$$= \sqrt{16+0+25} = \sqrt{41} \quad = 6.4 \text{ लगभग}$$

और $$|AC| = \sqrt{(5+1)^2 + (4-2)^2 + (0-3)^2}$$

$$= \sqrt{36+4+9} = 7$$

$\therefore$ $$|AB| + |BC| = 3.464 + 6.4 = 9.864 > |AC|,$$

इसी प्रकार $$|AB| + |AC| > |BC|$$

तथा $$|BC| + |AC| > |AB|.$$

क्योंकि दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा है, अतः बिन्दु A, B तथा C एक त्रिभुज बनाते हैं।

(b) माना बिन्दु $(2,-3,3), (1,2,4)$ और $(3,-8,2)$ क्रमशः P,Q और R द्वारा निरूपित होते हैं।

$\therefore$ $$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (2+3)^2 + (4-3)^2}$$

$$= \sqrt{1+25+1} = 3\sqrt{3}$$

$$|QR| = \sqrt{(3-1)^2 + (-8-2)^2 + (2-4)^2}$$

$$= \sqrt{4+100+4} = 6\sqrt{3}$$

तथा $$|PR| = \sqrt{(3-2)^2 + (-8+3)^2 + (2-3)^2}$$

$$= \sqrt{1+25+1}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

इस अवस्था में $|PQ| + |PR| = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = |QR|$

अतः दिये गए बिन्दु त्रिभुज नहीं बनाते। वास्तव में ये बिन्दु एक रेखा पर स्थित है।

उदाहरण 33.5. दिखाइये कि बिन्दु $A(1,2,-2), B(2,3,-4)$ और $C(3,4,-3)$ एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

हल : $$AB^2 = (2-1)^2 + (3-2)^2 + (-4+2)^2 = 1+1+4 = 6$$

$$BC^2 = (3-2)^2 + (4-3)^2 + (-3+4)^2 = 1+1+1 = 3$$

और $$AC^2 = (3-1)^2 + (4-2)^2 + (-3+2)^2 = 4+4+1 = 9$$

यहाँ पर $AB^2 + BC^2 = 6+3 = 9 = AC^2$

दिये गए बिन्दु समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

उदाहरण 33.6. दिखाइये कि बिन्दु $A(0,4,1)$, $B(2,3,-1)$, $C(4,5,0)$ तथा $D(2,6,2)$ एक वर्ग के शीर्ष हैं।

हल: यहाँ $$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (3-4)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 \text{ इकाई}$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (5-3)^2 + (0+1)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ इकाई}$$

$$CD = \sqrt{(2-4)^2 + (6-5)^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{4+1+4} = 3 \text{ इकाई}$$

तथा
$$DA = \sqrt{(0-2)^2 + (4-6)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ इकाई}$$

$$\therefore \quad AB = BC = CD = DA$$

अब
$$AC^2 = \sqrt{(4-0)^2 + (5-4)^2 + (0-1)^2}$$

$$= 16+1+1 = 18 \text{ इकाई}$$

$$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18 = AC^2$$

$\therefore$ $\angle B = 90^\circ$ चतुर्भुज A B C D में

$AB = BC = CD = DA$ तथा $\angle B = 90^\circ$

$\therefore$ चतुर्भुज A B C D एक वर्ग है।

देखें आपने कितना सीखा 33.2

1. निम्नलिखित बिन्दुओं के बीच दूरी ज्ञात कीजिए :

   (a) $(4, 3, -6)$ और $(-2, 1, -3)$ (b) $(-3, 1, -2)$ और $(-3, -1, 2)$

   (c) $(0, 0, 0)$ और $(-1, 1, 1)$

2. दिखाइये कि यदि बिन्दुओं $(5, -1, 7)$ और $(a, 5, 1)$ के बीच की दूरी 9 एकक हो, तो "a" का मान 2 या 8 होगा।

3. दिखाइये कि बिन्दुओं (a, b, c), (b, c, a) और (c, a, b) द्वारा बनाया गया त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होगा।

4. दिखाइये कि बिन्दु $(-1, 0, -4)$, $(0, 1, -6)$ और $(1, 2, -5)$ एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

5. दिखाइये कि बिन्दु $(0, 7, 10)$, $(-1, 6, 6)$ और $(-4, 9, 6)$ एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं।

6. दिखाइए कि बिन्दु $(3, -1, 2)$, $(5, -2, -3)$, $(-2, 4, 1)$ तथा $(-4, 5, 6)$ एक समांतर चतुर्भुज बनाते हैं।

7. दिखाइए कि बिन्दु $(2, 2, 2)$, $(-4, 8, 2)$, $(-2, 10, 10)$ तथा $(4, 4, 10)$ एक वर्ग बनाते हैं।

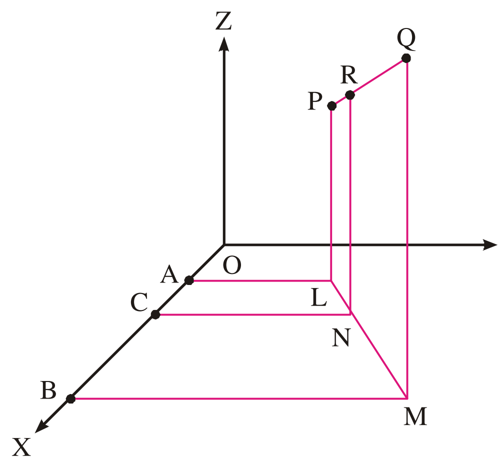
8. दिखाइये कि प्रत्येक अवस्था में तीनों दिए बिन्दु संरेख है :

   (a) $(-3, 2, 4)$, $(-1, 5, 9)$ और $(1, 8, 14)$

(b) $(5, 4, 2)$, $(6, 2, -1)$ और $(8, -2, -7)$

(c) $(2, 5, -4)$, $(1, 4, -3)$ और $(4, 7, -6)$

33.3 एक रेखाखण्ड को विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक



चित्र 33.7

माना बिन्दु R (x, y, z) रेखाखण्ड PQ को $l : m$ के आन्तरिक अनुपात में विभाजित करता है। माना P के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) है तथा Q के निर्देशांक (x_2, y_2, z_2) हैं।

बिन्दुओं P,Q तथा Q से PL, RN और QM समतल XY पर लम्ब खींचिएं

LA, NC और MB अक्ष OX पर लम्ब खीचिए

अब $\qquad AC = OC - OA = x - x_1$

और $\qquad BC = OB - OC = x_2 - x$

अब $\qquad \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{LN}{NM} = \dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{l}{m}$

$\therefore \qquad \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{l}{m}$

अथवा $\qquad mx - mx_1 = lx_2 - lx$

अथवा $\qquad (l + m)x = lx_2 + mx_1$

अथवा $\qquad x = \dfrac{lx_2 - mx_1}{l + m}$

इसी प्रकार यदि हम क्रमशः OY और OZ पर लम्ब खींचें, तो

$$y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m} \qquad \text{और} \qquad z = \frac{lz_2 + mz_1}{l + m}$$

R एक बिन्दु $\left(\dfrac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \dfrac{ly_2 + my_1}{l + m}, \dfrac{lz_2 + mz_1}{l + m}\right)$ है।

यदि $\lambda = \frac{l}{m}$ हो, तो $\lambda : 1$ के अनुपात में रेखाखण्ड PQ को विभाजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक

$$\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right), \lambda + 1 \neq 0 \text{ है।}$$

यह स्पष्ट ही है कि λ के प्रत्येक मान के लिए, रेखा PQ पर एक संगत बिन्दु है तथा PQ पर प्रत्येक बिन्दु R के लिए λ का कुछ मान है। यदि λ घनात्मक है तो R रेखाखण्ड PQ पर स्थित होगा औरयदि λ का मान ऋणात्मक है तो R रेखा खण्ड PQ पर नहीं होगा।

दूसरी अवस्था में आप कह सकते हैं कि R रेखा खण्ड PQ को $-\lambda : 1$ के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है।

उपप्रमेय 1 : PQ को $l : m$ के बाह्य अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}, \frac{lz_2 - mz_1}{l - m}\right)$$

उपप्रमेय 2 : PQ के मध्य बिन्दु के निर्देशांक हैं

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

उदाहरण 33.7. बिन्दुओं $(2, -4, 3)$ और $(-4, 5, -6)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:1 के आन्तरिक अनुपात में विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $A(2, -4, 3)$ और $B(-4, 5, -6)$ दो बिन्दु हैं

माना P (x, y, z) रेखाखण्ड AB को 2:1 के आन्तरिक अनुपात में विभाजित करता है

$$\therefore \quad x = \frac{2(-4) + 1.2}{2 + 1} = -2, \quad y = \frac{2.5 + 1(-4)}{2 + 1} = 2$$

और $$z = \frac{2(-6) + 1.3}{2 + 1} = -3$$

P के निर्देशांक $(-2, 2, -3)$ हैं।

उदाहरण 33.8. बिन्दुओं $(-1, -3, 2)$ और $(1, -1, 2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:3 के बाह्य अनुपात में विभाजन करने वाला बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : माना $(-1, -3, 2)$ और $(1, -1, 2)$ दो बिन्दु हैं

माना R (x, y, z) रेखाखण्ड PQ को 2:3 के बाह्य अनुपात में विभाजि करता है।

अब $$x = \frac{2(1) - 3(-1)}{2 - 3} = -5, \quad y = \frac{2(-1) - 3(-3)}{2 - 3} = -7$$

और $$z = \frac{2(2) - 3(2)}{2 - 3} = 2$$

$\therefore$ R के निर्देशांक हैं $(-5, -7, 2)$.

उदाहरण 33.9. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिस में बिन्दुओं $(2, -3, 5)$ और $(7, 1, 3)$ को मिलाने वाला रेखा खण्ड XY समतल द्वारा विभाजित होता है।

हल : माना अभीष्ट अनुपात जिसमें रेखाखंड विभाजित होता है $= l : m$

$\therefore$ बिन्दु के निर्देशांक हैं $\left(\frac{7l+2m}{l+m}, \frac{l-3m}{l+m}, \frac{3l+5m}{l+m}\right)$

क्योंकि यह बिन्दु XY समतल में है।

$\therefore$ इसका Z- निर्देशांक शून्य है

अर्थात $\qquad \frac{3l+5m}{l+m} = 0$ और $\frac{l}{m} = -\frac{5}{3}$

अत: XY समतल को 5:3 के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है।

देखें आपने कितना सीखा 33.3

1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(2, -5, 3)$ और $(-3, 5, -2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 1:4 के आन्तरिक अनुपात में विभाजित करता है।

2. वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(2, -3, 1)$ और $(3, 4, -5)$ को 3:2 के आन्तरिक तथा बाह्य अनुपात में विभाजित करते हैं।

3. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $(2, 4, 5)$ और $(3, 5, -4)$ को मिलाने वाला रेखाखण्ड YZ समतल द्वारा विभाजित होता है।

4. दिखाइये कि YZ समतल बिन्दुओं $(3, 5, -7)$ और $(-2, 1, 8)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $\left(0, \frac{13}{5}, 2\right)$ पर 3:2 के अनुपात में विभाजित करता है।

5. दिखाइये कि वह अनुपात, जिसमें निर्देशांक समतल बिन्दुओं $(-2, 4, 7)$ और $(3, -5, 8)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को क्रमश: $2 : 3, 4 : 5$ में आन्तरिक और $7 : 8$ में बाह्य अनुपात विभाजत करते हैं।

6. एक बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:1 के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है।चांच कीजिए कि Q रेखाखण्ड PR का मध्य बिन्दु है।

आइये दोहराएँ

- आकाश में आयताकार निर्देशांक अक्षों के संदर्भ में, दिये गये बिन्दु P(x, y, z) से यदि हम तीन निर्देशांक समतलों के समान्तर समतल खींचे जो अक्षों को A, B और C में मिलें (माना), तब $OA = x, OB = y$ और $OC = z$ जबकि O मूल बिन्दु है।

- विलोमत: यदि तीन संख्याएँ x, y और z दी गई हों, तो हम आकाश में एक अद्वितीय बिन्दु ज्ञात कर सकते हैं, जिस के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

  बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी

  $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

  विशेषतया, बिन्दु P की मूल बिन्दु से दूरी $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

- बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $l : m$के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक है।

  (a) (आन्तरिक विभाजन) $\left(\dfrac{lx_2 + mx_1}{l+m}, \dfrac{ly_2 + my_1}{l+m}, \dfrac{lz_2 + mz_1}{l+m}\right)$

  (b) (बाह्य विभाजन) $\left(\dfrac{lx_2 - mx_1}{l-m}, \dfrac{ly_2 - my_1}{l-m}, \dfrac{lz_2 - mz_1}{l-m}\right)$

  विशेष रूप से, PQ के मध्य बिन्दु के निर्देशांक है:

  $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.mathguru.com/level3/introduction-to-three-dimensional-geometry-*
- *http://www.goiit.com/posts/show/0/content-3-d-geometry-804299.htm*
- *http://www.askiitians.com/iit-jee-3d-geometry*

आइए अभ्यास करें

1. दिखाइये कि बिन्दु (0,7,10), (–1,6,6) और (–4,9,6) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाते हैं।
2. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P, Q और R जिन के निर्देशांक क्रमश: (3,2,–4), (5,4,–6) और (9,8,–10) हैं। सरेख हैं तथा वह अनुपात भी ज्ञात कीजिए जिस में Q रेखाखण्ड PR को विभाजित करता है।
3. दिखाइये कि बिन्दु (0,4,1), (2,3,–1), (4,5,0) और (2,6,2) एक वर्ग के शीर्ष हैं।
4. दिखाइये कि बिन्दु (4,7,8),(2,3,4), (–1,–2,1) और (1,2,5) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
5. एक समान्तर चतुभुज के तीन शीर्ष (3,–4,7) , B(5,3,–2) तथा C(1,2,–3) है, चौथा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 33.1

1. (a) OX' YZ (b) OXYZ'
   (c) OX' YZ' (d) OXY'Z
   (e) OXYZ'

देखें आपने कितना सीखा 33.2

1. (a) 7 (b) $2\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{3}$

देखें आपने कितना सीखा 33.3

1. $(1, -3, 2)$ 2. $\left(\frac{13}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{13}{5}\right)$; $(5, 18, -17)$

3. $-2 : 3$ 6. $(2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1, 2z_2 - z_1)$

आइए अभ्यास करें

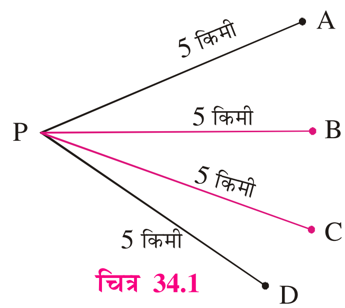
5. $(-1, -5, -6)$

34

सदिश

हम दैनिक जीवन की स्थितिओं में भौतिक राशियों जैसे दूरी, चाल, तापमान, आयतन इत्यादि का प्रयोग करते हैं। यह मात्राएँ स्थिति के परिवर्तन, स्थिति के परिवर्तन की दर, वस्तु या एक विशेष स्थान का तापमान तथा एक विशेष स्थान में घेरे हुए अंतरिक्ष का वर्णन करने के लिए पर्याप्त हैं। हमें ऐसी भौतिक राशियाँ– जैसे विस्थापन, वेग, त्वरण, संवेग इत्यादि भी देखने को मिलती हैं, जोकि भिन्न प्रकार की हैं।

आइए निम्न स्थिति का अवलोकन करें। मान लीजिए एक निश्चित बिन्दु P से चार बिन्दु A,B,C और D समान दूरी (माना प्रत्येक 5 किमी) पर हैं। यदि आपको निश्चित बिन्दु P से 5 किमी चलने के लिए कहा जाए, तो आप A,B,C या D में से किसी एक बिन्दु पर पहुँच सकते हैं। अतः आरम्भिक बिन्दु और दूरी, गन्तव्य स्थान का वर्णन करने के लिए पर्याप्त नहीं हैं। निश्चित बिन्दु से अन्तयः बिन्दु का विचार दिशा की आवश्यकता दर्शाता है।



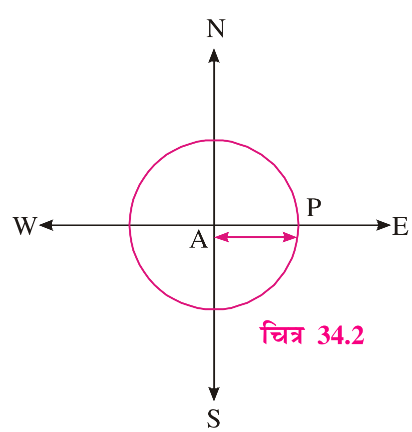
चित्र 34.1

एक गतिशील गेंद का उदाहरण लें। यदि हम किसी समय पर गेंद की स्थिति के बारे में सूचना देना चाहें, तो हमें किन मूलभूत बातों की आवश्यकता होगी जिससे हम यह पूर्वानुमान कर सकें ?

मान लीजिए आरम्भ में गेंद एक विशेष बिन्दु A पर है। यदि यह पता हो कि गेंद सरल रेखा में 5 सेमी/सेकिन्ड की चाल से चल रही है, तो क्या हम 3 सेकिन्ड के बाद गेंद की स्थिति को बता सकेंगे? स्पष्टतया नहीं। शायद हम यह कह दें कि गेंद बिन्दु A से 15 सेमी की दूरी पर होगी तथा इसलिए यह केन्द्र A तथा 15 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर किसी बिन्दु पर होगी।

अतः केवल चाल और समय का ज्ञान गेंद की स्थिति का वर्णन करने के लिए पर्याप्त नहीं है। जबकि यदि हम यह जानते हैं कि गेंद A के पूर्व की दिशा में 5 सेमी/सेकिन्ड की चाल से चलती है तो हम इस स्थिति में होंगे कि यह बता सकें कि 3 सेकेन्ड के बाद गेंद 15 सेमी दूर एक बिन्दु P पर A के पूर्व की दिशा में होगी।

अतः एक गेंद के t(3) सेकिन्ड में विस्थापन के अध्ययन के लिए हमें गति का परिमाण (अर्थात् 5 सेमी/सेकिन्ड) तथा इस की दिशा (A के पूर्व) की आवश्यकता होगी। इस पाठ में, हम ऐसी राशियों के विषय में चर्चा करेंगे जिनका केवल परिमाण होता है– इन्हें अदिश कहा जाता है तथा ऐसी राशियों के विषय में भी पढ़ेंगे जिनका परिमाण और दिशा दोनों होते है– इन्हें सदिश कहते हैं। सदिशों को हम दिष्ट रेखाखण्डों द्वारा दर्शायेंगे तथा उनके परिणाम और दिशाएँ निर्धारित करेंगे। हम विभिन्न प्रकार के सदिशों का अध्ययन करेंगे और उन पर कुछ संक्रियाएँ करेंगे तथा उनके गुणों का अध्ययन करेंगे। हम अपने आपको



चित्र 34.2

एक बिन्दु के, किसी मूलबिन्दु के सापेक्ष, स्थिति सदिश के बारे में अवगत करवायेंगे। हम दो विमाओं या तीन विमाओं में, दो या तीन युग्मत: लम्बिक दिशाओं का प्रयोग करते हुए, एक सदिश के घटक ज्ञात करेंगे। हम विभाजन सूत्र की भी उत्पत्ति करेंगे तथा इसे समस्याओं में प्रयोग करेंगे। हम दो सदिशों के अदिश और सदिश गुणनफलों को भी परिभाषित करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- दिशा के ज्ञान की आवश्यकता स्पष्ट करना
- अदिश और सदिश को परिभाषित करना
- अदिशों और सदिशों में भेद करना
- सदिशों को दिष्ट रेखाखण्डों के रूप में निरूपित करना
- सदिश का परिमाण और दिशा ज्ञात करना
- भिन्न भिन्न प्रकार के सदिशों का वर्गीकरण करना, रिक्त तथा एकक (मात्रक) सदिश
- दो सदिशों की समानता परिभाषित करना
- एक बिन्दु के स्थिति सदिश को परिभाषित करना
- सदिशों का जोडना और घटाना
- एक सदिश की एक अदिश से गुणा करना
- सदिशों पर विभिन्न संक्रियाओं के गुणों के कथन देना और उनका प्रयोग करना
- त्रिविमीय आकाश को समझना
- एक सदिश को दो या तीन लम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजित करना
- विभाजन सूत्र की उत्पत्ति करना तथा इसका प्रयोग करना
- दो सदिशों के अदिश (डाट) गुणनफल,
  तथा सदिश (क्रास) गुणनफल को परिभाषित करना
- सदिश के दिक-कोसाइन एवं दिक अनुपात को परिभाषित करना एवं समझना
- सदिशों के त्रिक गुणनफल को परिभाषित करना।
- सदिशों के अदिश त्रिक गुणनफल को समझना और इसके प्रयोग से समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात करना।
- चार बिन्दुओं के समतलीय होने की समझ।

पूर्व ज्ञान

- समतल ज्यामिति और निर्देशांक ज्यामिति का ज्ञान
- त्रिकोणमिति का ज्ञान

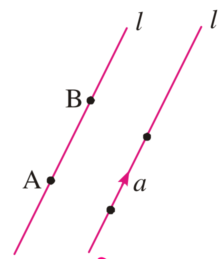
34.1 अदिश तथा सदिश

एक भौतिक राशि जिसे केवल संख्या द्वारा व्यक्त किया जा सकता हो, अदिश कहलाती है। दूसरे शब्दों में वह राशि जिसका केवल परिमाण होता है अदिश कहलाती है। समय, द्रव्यमान, लम्बाई, चाल, तापमान, आयतन, ताप की मात्रा, किया गया कार्य आदि सभी राशियाँ **अदिश** हैं।

भौतिक राशियाँ जो परिमाण तथा दिशा रखती हों, सदिश कहलाती हैं। विस्थापन, वेग, त्वरण, बल, भार इत्यादि **सदिशों** के उदाहरण हैं।

34.2 सदिश एक दिष्ट रेखाखण्ड के रूप में

आप याद कीजिए कि एक रेखाखण्ड एक दी गई रेखा का एक भाग होता है, जिसके दो अंत्य: बिन्दु होते हैं। कोई एक रेखा l लीजिए (जो कि आधार कहलाता है)। l का वह भाग जिस के अन्त: बिन्दु A और B हैं, एक रेखाखण्ड कहलाता है। रेखाखण्ड AB, A से B की दिशा में $\overrightarrow{AB}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा एक दिष्ट रेखाखण्ड कहलाता है। बिन्दुओं A और B को सदिश $\overrightarrow{AB}$ के क्रमश: आदि तथा अन्त: बिन्दु कहते हैं।



चित्र 34.3

लम्बाई AB, सदिश $\overrightarrow{AB}$ का परिमाण या मापांक कहलाती है तथा इसे $|\overrightarrow{AB}|$ द्वारा दर्शाते हैं। दूसरे शब्दों में, लम्बाई $AB = |\overrightarrow{AB}|$ है।

अदिशों को प्राय: a,b,c इत्यादि द्वारा प्रकट करते हैं, जबकि सदिशों को प्राय: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इत्यादि द्वारा दर्शाते हैं। सदिश $\vec{a}$ के परिमाण $|\vec{a}|$ को प्राय: प्रतीक 'a' द्वारा दिखाते हैं।

34.3 सदिशों का वर्गीकरण

34.3.1 शून्य सदिश (रिक्त सदिश)

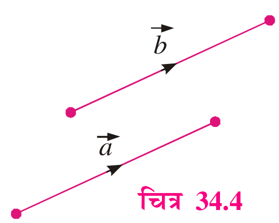
एक सदिश जिसका परिमाण शून्य हो, शून्य सदिश कहलाता है। शून्य सदिश की कोई निश्चित दिशा नहीं होती। सदिश $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ शून्य सदिश हैं। शून्य सदिश को प्रतीक $\vec{0}$ द्वारा भी प्रकट करते हैं, जिससे इसमें तथा अदिश 0 में अन्तर स्पष्ट हो सके।

34.3.2 एकक सदिश

एक सदिश जिसका परिमाण एक इकाई हो, एकक सदिश कहलाता है। अत: एकक सदिश $\vec{a}$ के लिए, $|\vec{a}| = 1$ होता है। एकक सदिश को प्राय: $\hat{a}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अत:, $\vec{a} = |\vec{a}|\, \hat{a}$ है।

34.3.3 समान सदिश

दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते हैं यदि उन के परिणाम समान हों अर्थात $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ तथा एक ही दिशा में हों जैसा कि चित्र 34.4 में दिखाया गया है।



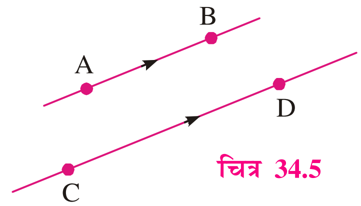
चित्र 34.4

संकेत रूप में इसे $\vec{a} = \vec{b}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

टिप्पणी: दो सदिश तब भी समान हो सकते हैं, यदि उनके आधार की रेखाएँ भिन्न हों परन्तु समान्तर हों।

34.3.4 समदिश सदिश

सदिश समदिश कहलाते हैं, यदि उनकी दिशाएँ एक ही हों, उन का परिमाण चाहे कुछ भी हो। चित्र 34.5 में, सदिश $\overrightarrow{AB}$ और सदिश $\overrightarrow{CD}$ समदिश हैं यद्यपि उन के परिमाण समान नहीं हैं।

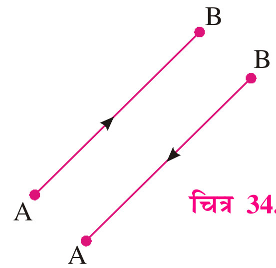


चित्र 34.5

34.3.5 सदिश का ऋण

सदिश $\overrightarrow{BA}$ सदिश $\overrightarrow{AB}$ का ऋण कहलाता है, जब उनके परिमाण तो समान हों परन्तु दिशाएँ विपरीत हों। चित्र 34.6

अर्थात्, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

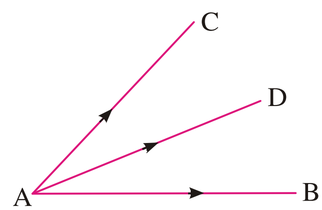


चित्र 34.6

34.3.6 सह-आदि सदिश

दो या अधिक सदिश **सह-आदि सदिश** कहलाते हैं, यदि उनका आदि बिन्दु एक ही हो।

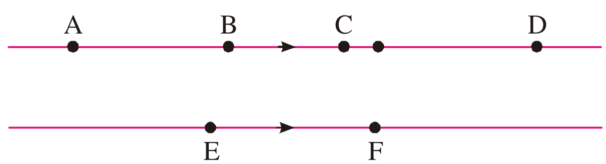
संलग्न चित्र 34.7 में, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ और $\overrightarrow{AC}$ एक ही बिन्दु A वाले सह-आदि सदिश हैं।



चित्र 34.7

34.3.7 संरेख सदिश

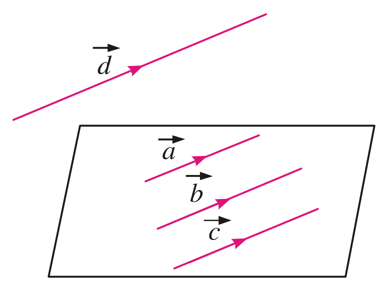
सदिश संरेख होते हैं, यदि वह एक ही रेखा के समान्तर हों, चाहे उनके परिमाण कुछ भी हों। संलग्न चित्र 34.8 में, सदिश $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ और $\overrightarrow{EF}$ संरेख सदिश हैं। सदिश $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{DC}$ भी संरेख हैं।



चित्र 34.8

34.3.8 समतलीय सदिश

वे सदिश समतलीय सदिश कहलाते हैं, जो एक ही तल के समान्तर होते हैं। संलग्न चित्र 34.9 में, सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ और $\vec{d}$ समतलीय हैं। यहाँ पर $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तो एक ही तल में हैं जबकि सदिश $\vec{d}$, सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के तल के समान्तर तल में स्थित है।



चित्र 34.9

टिप्पणी: (i) एक शून्य सदिश को किसी भी सदिश के संरेख बनाया जा सकता है।

(ii) कोई दो सदिश सदा समतलीय होते हैं।

उदाहरण 34.1. निम्न में से कौन-कौन अदिश हैं तथा कौन-कौन सदिश हैं? कारण दीजिए।

(a)	द्रव्यमान	(b)	भार	(c)	संवेग
(d)	तापमान	(e)	बल	(f)	घनत्व

हल : (a), (d) और (f) अदिश हैं, क्योंकि इनके केवल परिमाण हैं।

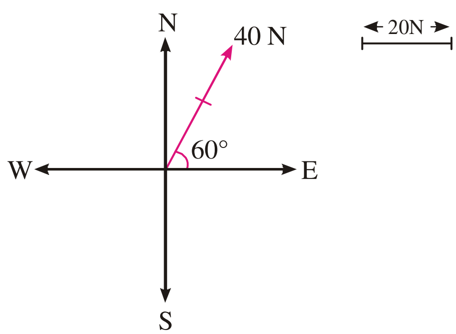
(b), (c) और (e) सदिश हैं, क्योंकि इनके परिमाण और दिशा दोनों हैं।

उदाहरण 34.2. आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए :

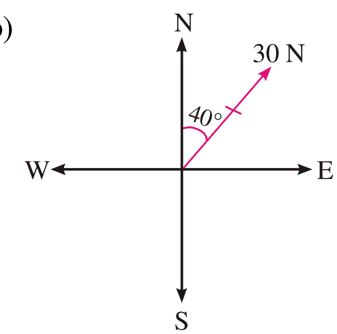
(a) 40N का एक बल, जिसकी दिशा पूर्व के उत्तर में 60° है।

(b) 30N का एक बल, जिसकी दिशा उत्तर के पूर्व में 40° है।

हल : (a)



(b)



चित्र 34.10 चित्र 34.11

देखें आपने कितना सीखा 34.1

1. निम्न में से कौन सी राशि अदिश है?

   (a) विस्थापन (b) वेग (c) बल (d) लम्बाई

2. निम्न में से कौन सी राशि सदिश है?

   (a) द्रव्यमान (b) बल (c) समय (d) तापांश

3. आपको एक 5 सेमी का विस्थापन सदिश दिया गया है, जो पूर्व की ओर है। चित्र द्वारा संगत ऋण सदिश दिखाइये।

4. समदिश सदिशों तथा समान सदिशों में अन्तर बताइये।

5. आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए:

   (a) 60 न्यूटन का एक बल जिसकी दिशा उत्तर के पश्चिम में 60° है।

   (b) 100 न्यूटन का एक बल जिसकी दिशा पश्चिम के उत्तर में 45° है।

34.4 सदिशों का योग

आपने चार मूल सक्रियाएँ सीखी हैं। ये हैं – संख्याओं में (योग), व्यवकलन, गुणा और भाग। सदिशों का योग (व्यवकलन), संख्याओं के योग (व्यवकलन) से भिन्न है।

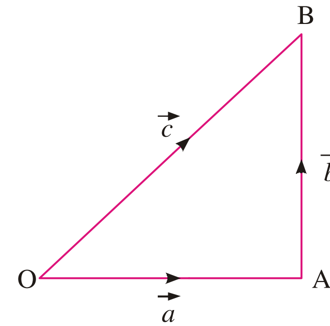
वास्तव में, दो सदिशों के परिणामी सदिश की एक संकल्पना है (ये दो वेग या दो बल भी हो सकते हैं)। हम इनको निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे :

आइये हम एक नाविक का उदाहरण लेते हैं, जो अपनी नाव में नदी पार करना चाहता है तथा आरम्भिक स्थान के ठीक सामने एक स्थान पर पहुंचना चाहता है। यदि वह किनारे की लाम्बिक दिशा में चलना शुरू करता है, तो पानी का वेग उसे उसके ऐच्छिक स्थान से भिन्न स्थान पर ले जाता है। यह उदाहरण दो वेगों के प्रभाव से तीसरे वेग की उत्पत्ति होना दर्शाता है, जिसे परिणामी वेग कहते हैं।

अत: दो सदिश, जिनके परिमाण 3 और 4 हैं, योग करने पर संभव है कि 7 परिमाण का एक सदिश न दें। यह सदिशों की दिशाओं अर्थात् उनके बीच के कोण पर निर्भर करेगा। सदिशों में योग की संक्रिया सदिशों के योग के त्रिभुज नियम के अनुसार होती है।

34.4.1 सदिशों के योग का त्रिभुज नियम

एक सदिश जिसका प्रभाव दो सदिशों के परिणामी या संयुक्त प्रभाव के बराबर हो, इन सदिशों का योग या परिणामी कहलाता है। यह सदिशों के योग के त्रिभुज नियम द्वारा किया जाता है। संलग्न चित्र 34.12 में, सदिश $\overrightarrow{OB}$ दो सदिशों $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{AB}$ के योग या परिणामी के समान है। इसे हम निम्न प्रकार से लिखते हैं :



चित्र 34.12

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

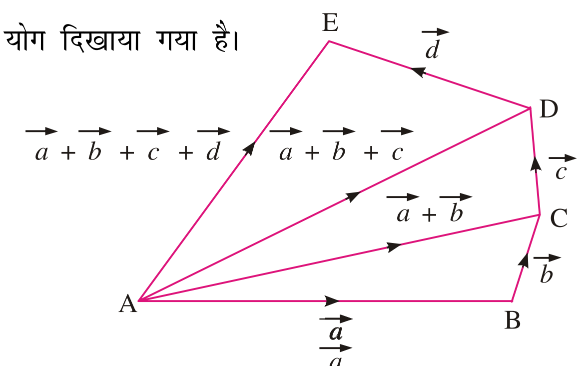
या $$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \vec{c}$$

आप यह अवलोकन कर सकते हैं कि सदिश $\vec{a}$ का अंत्य बिन्दु, सदिश $\vec{b}$ का आदि बिन्दु है तथा सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ का आदि बिन्दु सदिश $\vec{a}$ का आदि बिन्दु है और इनका अन्त: बिन्दु सदिश $\vec{b}$ का अन्त: बिन्दु है।

34.4.2 दो से अधिक सदिशों का योग

संलग्न चित्र 34.13 में, दो से अधिक सदिशों का योग दिखाया गया है।

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \overrightarrow{AE}$$



चित्र 34.13

सदिश $\overrightarrow{AE}$ दिये गये सदिशों का योग या परिणामी कहलाता है।

34.4.3 सदिशों के योग का समान्तर चतुर्भुज नियम

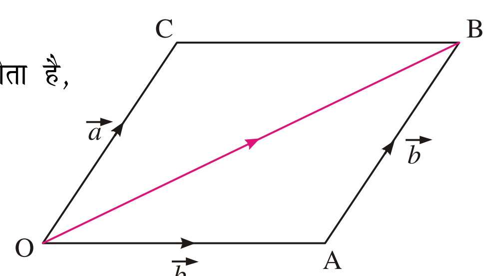
याद कीजिए कि दो सदिश समान होते हैं, जब उनके परिमाण और दिशा वही हों। परन्तु ये समान्तर भी हो सकते हैं (देखिये चित्र 34.14)।

संलग्न चित्र में, समान्तर चतुर्भुज $OABC$ से हमें प्राप्त होता है,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

परन्तु $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$$

$\therefore$ $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$$



चित्र 34.14

जो कि सदिशों के योग का समान्तर चतुर्भुज नियम है। यह नियम है :

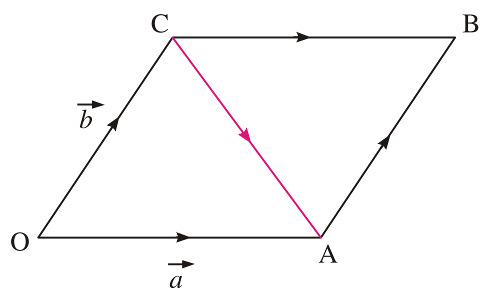
यदि एक समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ दो सदिशों को निर्धारित करती हों, तो उनके परिणामी सदिश को आसन्न भुजाओं के उभयनिष्ठ बिन्दु से होकर जाने वाला विकर्ण निर्धारित करेगा।

34.4.4 सदिश का ऋण

किसी सदिश $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ के लिए, $\vec{a}$ का ऋण सदिश $\overrightarrow{AO}$ द्वारा निर्धारित होता है। $\overrightarrow{AO}$ का ऋण वही सदिश $\overrightarrow{OA}$ होगा। अतः, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AO}| = |\vec{a}|$ और $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$. होगा। परिभाषा से, हम देखते हैं कि किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

34.4.5 दो दिये गए सदिशों का अन्तर

दो दिये गये सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए, अन्तर $\vec{a} - \vec{b}$ को सदिश $\vec{b}$ के ऋण और सदिश $\vec{a}$ का योग कहा जाता है। अर्थात् $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ।



चित्र 34.15

संलग्न चित्र में, यदि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{oc} = \vec{b}$ हो, तो समान्तर चतुर्भुज OABC में, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$

और $\overrightarrow{BA} = -\vec{b}$ होगा।

$\therefore \quad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

उदाहरण 34.3. दो शून्येतर सदिशों का योग शून्य कब होता है ?

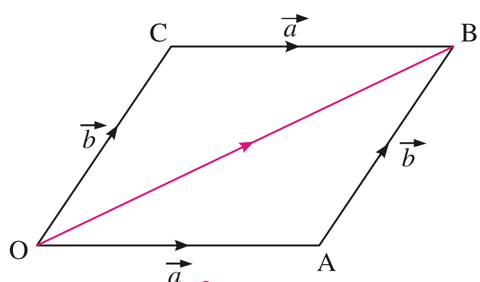
हल : दो शून्येतर सदिशों का योग शून्य तब होता है, जब उनके परिमाण समान हों, परन्तु वे विपरीत दिशाओं में हों।

उदाहरण 34.4. चित्र द्वारा दिखाइये कि $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

हल : संलग्न चित्र 34.16 से,

परिणामी सदिश $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$= \vec{a} + \vec{b}$ ....(i)



चित्र 34.16

समान्तर चतुर्भुज OABC को पूरा कीजिए।

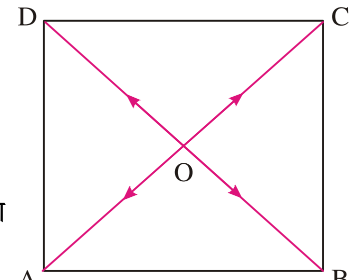
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$

और $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$

$= \vec{b} + \vec{a}$ .....(ii)

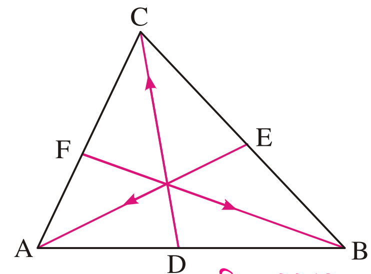
$\therefore \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [(i) और (ii) से]

देखें आपने कितना सीखा 34.2



चित्र 34.17

1. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। सदिशों $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ और $\overrightarrow{OD}$ का योग ज्ञात कीजिए।

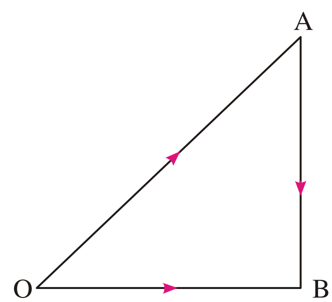


चित्र 34.18

2. एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ बिन्दु O पर काटती हैं। सदिशों $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ का योग ज्ञात कीजिए।

34.5 एक बिन्दु का स्थिति सदिश

हम अंतरिक्ष में कोई बिन्दु O लेते हैं। अंतरिक्ष में किसी दिये गए बिन्दु P को O से मिलाइए तथा सदिश $\overrightarrow{OP}$ प्राप्त कीजिए। यह सदिश बिन्दु P का मूलबिन्दु O के संदर्भ में **स्थिति सदिश** कहलाता है। अत:, अंतरिक्ष में प्रत्येक बिन्दु का मूलबिन्दु के संदर्भ में एक अद्वितीय स्थिति होता है। विलोमत: यदि हमें एक मूलबिन्दु O दिया गया हो तो O आदि बिन्दु के प्रत्येक सदिश के संगत एक बिन्दु है, जो अंतरिक्ष में इसका अंत्य बिन्दु होगा।



चित्र 34.19

एक सदिश $\overline{AB}$ लीजिए। माना O मूलबिन्दु है।

तब $\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

या $\overrightarrow{AB}$ = अंत्य बिन्दु B का स्थिति सदिश – आदि बिन्दु A का स्थिति सदिश

34.6 एक सदिश का एक अदिश से गुणन

एक शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का एक अदिश $x \neq 0$ के साथ गुणनफल एक सदिश होता है, जिसकी लम्बाई $|x||\vec{a}|$ होती है तथा जिसकी दिशा वही होती है जो सदिश $\vec{a}$ की है, यदि $x>0$ है और सदिश $\vec{a}$ से विपरीत दिशा होती है, यदि $x<0$ है। सदिश $\vec{a}$ के अदिश x से गुणनफल को $x \cdot \vec{a}$ से व्यक्त किया जा सकता है। सदिश $\vec{a}$ और अदिश 0 का गुणनफल सदिश $\vec{\mathbf{0}}$ होता है।

परिभाषा से, यह निष्कर्ष निकलता है कि एक शून्य सदिश का एक शून्येतर अदिश से गुणनफल शून्य सदिश होता है। अर्थात् $x \cdot \vec{0}=\vec{0}$ तथा $0 \cdot \vec{a}=\vec{0}$.

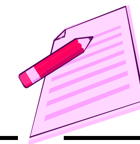
सदिशों के गुणन के नियम : यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सदिश हों तथा x और y अदिश हों, तो

(i) $\quad x(y\,\vec{a})=(x\,y)\,\vec{a}$

(ii) $\quad x\,\vec{a}+y\,\vec{a}=(x+y)\,\vec{a}$

(iii) $\quad x\,\vec{a}+x\,\vec{b}=x\,(\vec{a}+\vec{b})$

(iv) $\quad 0\,\vec{a}+x\,\vec{0}=\vec{0}$



याद कीजिए कि दो संरेख सदिशों की दिशा वही होती है, परन्तु परिमाण भिन्न हो सकते हैं। इसका अर्थ यह है कि सदिश $\vec{a}$ तथा शून्येतर सदिश $\vec{b}$ संरेख हैं, यदि और केवल यदि एक अदिश संख्या x ऐसी हो कि

$$\vec{a} = x\,\vec{b}$$

प्रमेय 34.1 दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के संरेख होने के लिए एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि दो ऐसी अदिश संख्याएँ x और y (दोनों इकट्ठे शून्य नहीं) हों, जिससे कि $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$ हों।

उपपत्ति : प्रतिबन्ध आवश्यक है

माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख हैं।

माना एक अदिश संख्या l है, जिससे $\vec{a} = l\,\vec{b}$ है।

अर्थात् $\quad \vec{a} + (-l)\,\vec{b} = \vec{0}$

हमने दो अदिश संख्याएँ $x\,(=1)$ और $y\,(=-l)$ ढूंढ ली हैं, जिससे $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$ है। ध्यान दीजिए कि अदिश 1 शून्येतर है।

प्रतिबन्ध पर्याप्त है

अब यह दिया गया है कि $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$ और इकट्ठे $x \neq 0,\ y \neq 0$ है।

मान लीजिए $y \neq 0$ है।

$\therefore \quad y\,\vec{b} = -x\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = -\dfrac{x}{y}\vec{a}$, अर्थात् $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख हैं।

उपप्रमेय: दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख हैं, यदि और केवल यदि प्रत्येक सम्बन्ध $x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$ से $x = 0$ और $y = 0$ प्राप्त हों।

[**संकेत:** यदि x और y में से कोई एक शून्येतर है, 'माना y', तो $\vec{b} = -\dfrac{x}{y}\vec{a}$, जो विरोधाभास है]

उदाहरण 34.5. वह संख्या x ज्ञात कीजिए जिससे शून्येतर सदिश $\vec{a}$ को गुणा करने पर

(i) $\hat{a}$ $\qquad$ (ii) $-\hat{a}$ प्राप्त हो।

हल: (i) $x\,\vec{a} = \hat{a}$, अर्थात् $\quad x\,|\vec{a}|\,\hat{a} = \hat{a}$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

(ii) $\quad x\,\vec{a} = -\hat{a}$, अर्थात् $\quad x\,|\vec{a}|\,\hat{a} = -\hat{a}$

$$\Rightarrow \qquad x = -\frac{1}{|\vec{a}|}$$

उदाहरण 34.6. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख नहीं है। ऐसी संख्या x ज्ञात कीजिए, जिससे सदिश $\vec{c} = (x-2)\,\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{d} = (2x+1)\,\vec{a} - \vec{b}$ संरेख हो जायें।

हल : $\vec{c}$ शून्येतर है, क्योंकि b का गुणांक शून्येतर है।

$\therefore$ एक संख्या y है, जिससे $\vec{d} = y\,\vec{c}$ होगा।

अर्थात् $\quad (2x+1)\vec{a} - \vec{b} = y\,(x-2)\,\vec{a} + y\,\vec{b}$

$\therefore \quad (yx - 2y - 2x - 1)\,\vec{a} + (y+1)\,\vec{b} = 0$

$\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख हैं।

$\therefore \quad yx - 2y - 2x - 1 = 0$ और $y + 1 = 0$

हल करने पर, $y = -1$ और $x = \dfrac{1}{3}$ प्राप्त होगा।

$\therefore \quad \vec{c} = -\dfrac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{d} = \dfrac{5}{3}\vec{a} - \vec{b}$

हम देख सकते हैं कि $\vec{c}$ और $\vec{d}$ विपरीत सदिश हैं। अतः ये संरेख हैं।

उदाहरण 34.7. दो बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $2\vec{a} + 3\vec{b}$ तथा $3\vec{a} + \vec{b}$ हैं। $\overrightarrow{AB}$ ज्ञात कीजिए।

हल : माना O संदर्भ का मूलबिन्दु है।

तब $\quad \overrightarrow{AB} =$ B का स्थिति सदिश $-$A का स्थिति सदिश

$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (3\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= (3-2)\,\vec{a} + (1-3)\,\vec{b} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

उदाहरण 34.8. दिखाइए कि बिन्दु P,Q तथा R, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} - 2\vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ तथा $-7\vec{b}$ हैं, संरेख हैं।

हल : $\overrightarrow{PQ} =$ Q का स्थिति सदिश $-$ P का स्थिति सदिश

$$= (2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$= \vec{a} + 5\vec{b} \qquad \text{....(i)}$$

तथा $\overrightarrow{QR} =$ R का स्थिति सदिश $-$ Q का स्थिति सदिश

$$= -7\vec{b} - (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= -7\vec{b} - 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$= -2\vec{a} - 10\vec{b}$$

$$= -2(\vec{a} + 5\vec{b}) \qquad \text{....(ii)}$$

(i) तथा (ii) से, हमें $\overrightarrow{QR} = -2\overrightarrow{PQ}$ मिलता है, जो $\overrightarrow{QR}$ का एक अदिश गुणज है।

$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} \,||\, \overrightarrow{QR}$

परन्तु Q एक उभयनिष्ठ बिन्दु है।

$\therefore \overrightarrow{PQ}$ तथा $\overrightarrow{QR}$ संरेख हैं। अतः P,Q तथा R संरेख हैं।

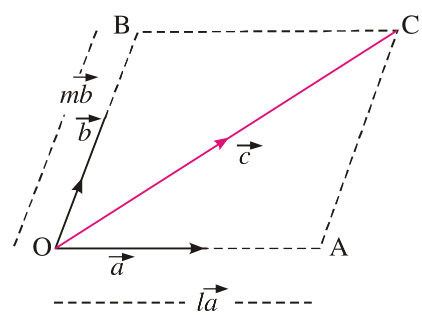
देखें आपने कितना सीखा 34.3

1. दिए गए मूलबिन्दु के संदर्भ में दो बिन्दुओं A और B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं। सदिश $\overrightarrow{AB}$ ज्ञात कीजिए।
2. निम्नलिखित में से प्रत्येक की व्याख्या कीजिए :

   (i) $3\vec{a}$ (ii) $-5\vec{b}$
3. बिन्दुओं A,B,C तथा D के स्थिति सदिश क्रमशः $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $4\vec{a}+3\vec{b}$ तथा $\vec{a}+2\vec{b}$ हैं। $\overrightarrow{DB}$ तथा $\overrightarrow{AC}$ ज्ञात कीजिए।
4. सदिश $\vec{n}$ और अदिश y के गुणनफल का परिमाण ज्ञात कीजिए।
5. बताइये कि एक सदिश को एक अदिश से गुणा करने पर सदिश प्राप्त होगा या अदिश।
6. दो सदिशों $\vec{p}$ और $\vec{q}$ के संरेख होने के लिए प्रतिबन्ध लिखिए।
7. दिखाइए कि बिन्दु जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $5\vec{a}+6\vec{b}$, $7\vec{a}-8\vec{b}$ तथा $3\vec{a}+20\vec{b}$ हैं, संरेख होंगें।

34.7 सदिशों की समतलीयता

यदि दो असंरेख सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दिये गए हों, तो उनको एक तल में रखा जा सकता है। यहाँ पर (तल में) सदिश एक दूसरे को प्रतिच्छेद करेंगे। हम उनका उभयनिष्ठ बिन्दु O लेते हैं तथा दोनो सदिशों को $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ मानते हैं। यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतलीय तीसरा सदिश $\vec{c}$ दिया गया हो, तो हम इसका आदि बिन्दु भी O को चुन सकते हैं। माना C इसका अंत्य बिन्दु है। सदिश $\overrightarrow{OC}$ को विकर्ण लेकर समान्तर चतुर्भुज को पूरा कीजिए। इस की आसन्न भुजाएँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।



चित्र 34.20

$$\therefore \qquad \vec{c} = l\,\vec{a} + m\,\vec{b}$$

इस प्रकार, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतलीय कोई सदिश $\vec{c}$, $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जाता है। अर्थात्, $\vec{c} = l\,\vec{a} + m\,\vec{b}$

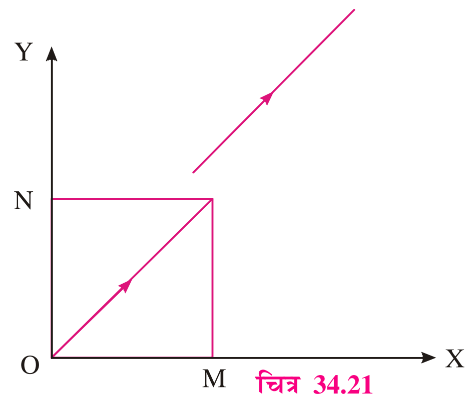
34.8 एक सदिश का दो लाम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजन

दो परस्पर लम्ब एकक सदिश $\hat{i}$ और $\hat{j}$ दो परस्पर लम्ब अक्षों OX और OY के अनुदिश लीजिए। हमने देखा है कि किसी सदिश $\vec{r}$ को जो कि $\hat{i}$ और $\hat{j}$ के तल में है, $x\hat{i}+y\hat{j}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\therefore \qquad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

यदि O सदिश $\vec{r}$ का आदि बिन्दु है, तब OM = x और ON = Y (चित्र 34.21)।

$\overrightarrow{OM}$ और $\overrightarrow{ON}$ सदिश $\vec{r}$ के x-अक्ष और y-अक्ष के अनुदिश घटक कहलाते हैं। इस विशेष व्यवस्था में, $\overrightarrow{OM}$ और $\overrightarrow{ON}$ को सदिश $\vec{r}$ के **वियोजित भाग** भी कहते हैं।



चित्र 34.21

34.9 एक सदिश का तीन विमाओं में तीन परस्पर लाम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजन

एक सदिश की तीन विमाओं में तीन परस्पर लाम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजन की संकल्पना, एक सदिश के तल में दो लाम्बिक अक्षों के अनुदिश वियोजन का एक विस्तार है।

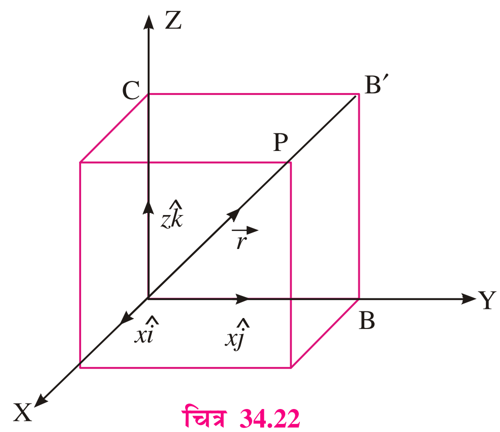
अंतरिक्ष में किसी सदिश $\vec{r}$ को तीन परस्पर लाम्बिक अक्षों के अनुदिश एकक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जैसे कि चित्र 34.22 में दिखाया गया है।

हम समकोणिक समांतरषटफलक को पूरा कर लेते हैं।

इसमें विकर्ण $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

तब, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$x\hat{i}, y\hat{j}$ और $z\hat{k}$ सदिश $\vec{r}$ के तीन परस्पर लाम्बिक अक्षों के अनुदिश **वियोजित भाग** कहलाते हैं।



चित्र 34.22

इस प्रकार, आकाश में किसी सदिश $\vec{r}$ को तीन परस्पर लाम्बिक एकक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

चित्र 34.21 में, $OP^2 = OM^2 + ON^2$ (दो विमाओं में)

अर्थात् $\vec{r}^2 = x^2 + y^2$ ......(i)

और चित्र 34.22 में,

$$OP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$$

$$\vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad ....(ii)$$

स्थिति (i) में, $\vec{r}$ का परिमाण $= |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

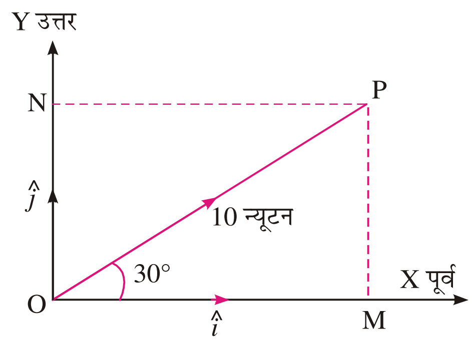
स्थिति (ii) में, $\vec{r}$ का परिमाण $= |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

टिप्पणी: यदि तीन असमतलीय सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ (आवश्यक नहीं ये लाम्बिक एकक सदिश हों) दिये गए हों, तो कोई सदिश $\vec{d}$ सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के रैखिक संयोजन अर्थात् $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 34.9. 10 न्यूटन का एक सदिश पूर्व के 30° उत्तर में है। उसके पूर्व और उत्तर दिशा के अनुदिश घटक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\hat{i}$ और $\hat{j}$ अक्षों OX और OY (क्रमश: पूर्व और उत्तर) के अनुदिश एकक सदिश हैं।

OP का OX और OY की दिशा में वियोजन करने पर,



चित्र 34.23

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$$

$$= 10\cos 30°\ \hat{i} + 10\sin 30°\ \hat{j}$$

$$= 10.\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + 10.\frac{1}{2}\ \hat{j}$$

$$= 5\sqrt{3}\ \hat{i} + 5\ \hat{j}$$

पूर्व दिशा के अनुदिश घटक $= 5\sqrt{3}$ न्यूटन

और उत्तर दिशा के अनुदिश घटक $= 5$ न्यूटन

उदाहरण 34.10. दिखाइये कि निम्न सदिश समतलीय हैं:

$$\vec{a} - 2\vec{b},\ 3\vec{a} + \vec{b} \text{ और } \vec{a} + 4\vec{b}$$

हल : सदिश समतलीय होंगे, यदि दो अदिश x और y इस प्रकार के हों कि

$$\vec{a} + 4\vec{b} = x(\vec{a} - 2\vec{b}) + y(3\vec{a} + \vec{b})$$

$$= (x + 3y)\vec{a} + (-2x + y)\vec{b} \qquad \text{.....(i)}$$

(i) के दोनों पक्षों में $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$x + 3y = 1 \quad \text{और} \quad -2x + y = 4$$

x और y के लिए हल करने पर, $x = -\frac{11}{7}$ और $y = \frac{6}{7}$ प्राप्त होता है।

क्योंकि $\vec{a} + 4\vec{b}$ को $\vec{a} - 2\vec{b}$ तथा $3\vec{a} + \vec{b}$ के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, इसलिए तीनों सदिश समतलीय हैं।

उदाहरण 34.11. दिया गया है $\vec{r_1} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{r_2} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$ निम्न के परिमाण ज्ञात कीजिए :

(a) $\vec{r_1}$ (b) $\vec{r_2}$ (c) $\vec{r_1} + \vec{r_2}$ (d) $\vec{r_1} - \vec{r_2}$

हल : (a) $|\vec{r_1}| = |\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

(b) $\qquad |\vec{r_2}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$

(c) $\vec{r_1} + \vec{r_2} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \qquad |\vec{r_1} + \vec{r_2}| = |3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}$

(d) $\vec{r_1} - \vec{r_2} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore \qquad |\vec{r_1} - \vec{r_2}| = |-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

उदाहरण 34.12. दो सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के परिणामी सदिश के समान्तर एकक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : परिणामी सदिश $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

$$= 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

परिणामी सदिश $\vec{R}$ का परिमाण $|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$\therefore$ परिणामी सदिश के समान्तर एकक सदिश

$$= \frac{R}{|\vec{R}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

उदाहरण 34.13. $\vec{r} - \vec{s}$ दिशा में एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि

$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{s} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ है।

हल : $\qquad \vec{r} - \vec{s} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore \qquad |\vec{r} - \vec{s}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$

$\therefore$ $(\vec{r} - \vec{s})$ की दिशा में एकक सदिश

$$= \frac{1}{\sqrt{35}}(-\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = -\frac{1}{\sqrt{35}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{35}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{35}}\hat{k}$$

उदाहरण 34.34. $2\vec{a} + 3\vec{b}$ की दिशा में एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ है।

हल : $\qquad 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + 3(3\hat{i} - 2j - \hat{k})$

$$= (2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}) + (9\hat{i} - 6j - 3\hat{k}) = 11\hat{i} - \hat{k}.$$

$\therefore \qquad |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{(11)^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}$

$\therefore$ $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ की दिशा में एकक सदिश $= \dfrac{11}{\sqrt{122}}\hat{i} - \dfrac{1}{\sqrt{122}}\hat{k}$

उदाहरण 34.15. दिखाइये कि निम्न सदिश समतलीय हैं :

$4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$, $-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$ और $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$, जबकि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं।

हल : यदि ये सदिश समतलीय हैं, तो इनमें से एक को अन्य दोनो सदिशों के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

माना $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c} = x(4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}) + y(-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})$ है।

जबकि x और y अदिश हैं।

दोनों पक्षों में $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$4x - 2y = -2,\ -2x + 4y = -2 \text{ और } -2x - 2y = 4$$

ये तीनों समीकरण $x = -1, y = -1$ के लिए संतुष्ट होते हैं।

इस प्रकार $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c} = (-1)(4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}) + (-1)(-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})$

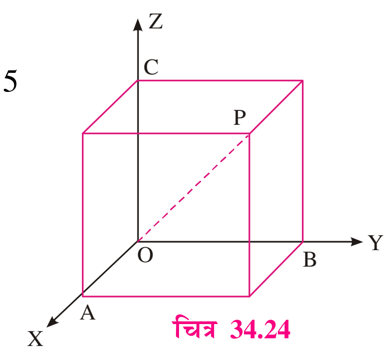
अत: दिये गये तीनों सदिश समतलीय हैं।

देखें आपने कितना सीखा 34.4

1. सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के समतलीय होने के लिए प्रतिबन्ध लिखिए।

2. परिणामी सदिश $\vec{r}$ ज्ञात कीजिए जिसके दो आयताकार कार्तीय निर्देशांक अक्षों के अनुदिश घटक क्रमश: 3 और 4 इकाई हों।

3. संलग्न चित्र में, $|OA| = 4$, $|OB| = 3$ और $|OC| = 5$
   OP को घटक सदिशों के रूप में व्यक्त कीजिए।



चित्र 34.24

4. यदि $\vec{r_1} = 4\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{r_2} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$
   और $\vec{r_3} = \hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ हो, तो दिखाइये कि
   $|\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}| = 7$

5. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के परिणामी सदिश के समान्तर एकक सदिश ज्ञात कीजिए।

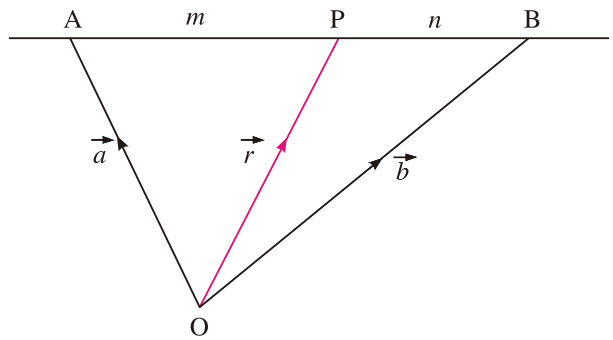
6. $3\vec{a}-2\vec{b}$ की दिशा में एक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ है।

7. दिखाइये कि निम्न सदिश समतलीय हैं:

   $3\vec{a}-7\vec{b}-4\vec{c}$, $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$ और $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$] जबकि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं।

34.10 विभाजन सूत्र

याद कीजिए कि अंतरिक्ष में किसी बिन्दु P का मूलबिन्दु O के संदर्भ में स्थिति सदिश $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ होता है। आगे आने वाली पंक्तियों में हम ऐसे बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात करने का प्रयास करेंगे, जो दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $m : n$ के अन्त: अनुपात में विभाजित करता है।



चित्र 34.25

मान लीजिए A और B दो बिन्दु हैं तथा उनके मूलबिन्दु O के संदर्भ में स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।

अत: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ और $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

मान लीजिए कि बिन्दु P रेखाखण्ड AB को $m : n$ के अन्त: अनुपात में विभाजित करता है।

अर्थात् $\quad \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n} \quad$ या, $\quad n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB} \quad$ ....(i)

क्योंकि $\quad n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$

$\therefore \quad n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$

या $\quad (m+n)\,\overrightarrow{OP} = m\,\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}$

या $\quad \overrightarrow{OP} = \dfrac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n}$

या $\quad \vec{r} = \dfrac{m\,\vec{b} + n\,\vec{a}}{m+n},$

जबकि $\vec{r}$ बिन्दु P का मूलबिंदु O के संदर्भ में, स्थिति सदिश है।

उपप्रमेय 1: यदि $\dfrac{m}{n} = 1 \Rightarrow m = n$ है, तब बिन्दु P रेखाखण्ड AB का मध्य-बिन्दु हो जाता है।

$\therefore$ दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का स्थिति सदिश $\dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ होता है, जबकि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ उन बिन्दुओं के क्रमश: स्थिति सदिश हैं।

उपप्रमेय 2: बिन्दु P के स्थिति सदिश को इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$\vec{r} = \frac{\vec{a} + \frac{m}{n}\vec{b}}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{\vec{a} + k\,\vec{b}}{1+k}, \qquad \text{.....(ii)}$$

जबकि $\quad k = \frac{m}{n},\ k \neq -1$ है।

(ii) से हम उस बिन्दु का स्थिति सदिश पाते हैं, जो दो बिन्दुओं, जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं, को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $k:1$ के अनुपात में विभाजित करता है।

उपप्रमेय 3: उस बिन्दु P का स्थिति सदिश, जो दो बिन्दुओं को $m:n$ के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है, निम्न है :

$$\vec{r} = \frac{n\,\vec{a} - m\,\vec{b}}{n-m}$$

जबकि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ उन बिन्दुओं के स्थिति सदिश हैं।

संकेत: यह विभाजन $-m:n$ के अनुपात में है।

उदाहरण 34.16. उस बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, जो दो बिन्दुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{x}$ और $\vec{y}$ हैं, को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $2:3$ के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।

हल : माना अभीष्ट बिन्दु का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

$$\therefore \qquad \vec{r} = \frac{3\vec{x} + 2\vec{y}}{3+2} = \frac{1}{5}(3\vec{x} + 2\vec{y})$$

उदाहरण 34.17. रेखाखण्ड AB के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, यदि A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{x} + 2\vec{y}$ तथा $2\vec{x} - \vec{y}$ हैं।

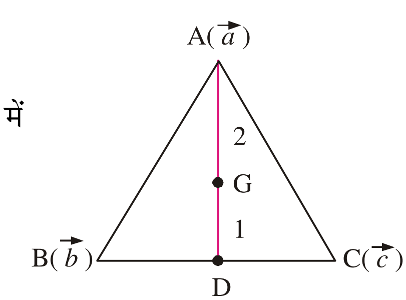
हल : AB के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश

$$= \frac{(\vec{x} + 2\vec{y}) + (2\vec{x} - \vec{y})}{2} = \frac{3}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$$

एक त्रिभुज ABC के शीर्षों A,B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं। ΔABC के केन्द्रक का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

हल: माना D, ΔABC की भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।

माना G, ΔABC का केन्द्रक है। तब G रेखाखण्ड AD को $2:1$ में विभाजित करता है, अर्थात् $AG : GD = 2:1$.।



चित्र 34.26

अब D का स्थिति सदिश $= \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$

$$\therefore \text{ G का स्थिति सदिश है} \quad = \frac{2\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + 1\cdot\vec{a}}{2+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

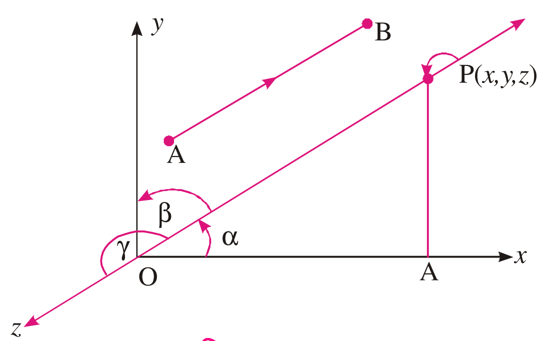
देखें आपने कितना सीखा 34.5

1. बिन्दु C का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, यदि यह AB को

   (i) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ के अनुपात में विभाजित करता है, (ii) $2 : -3$ के अनुपात में विभाजित करता है, जबकि यह दिया गया है कि A और B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।
2. वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $P(\vec{p})$ और $Q(\vec{q})$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3 : 4 के अन्तः अनुपात में विभाजित करता है।
3. रेखाखण्ड CD बिन्दुओं P और Q से समत्रिभाजित होता है। यदि बिन्दुओं C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{c}$ और $\vec{d}$ हों, तो समत्रिभाजन करने वाले बिन्दुओं के स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।
4. सदिश की सहायता से सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की मध्यिकाएं संगामी होती हैं।
5. सदिश की सहायता से सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का माध्य बिंदुओं को मिलाने वाला रेखा खंड तीसरी भुजा के समांतर व उसका आधा होता है।

34.11 सदिश के दिक-कोसाइन

संलग्न आकृति में $\overrightarrow{AB}$ अंतरिक्ष में एक सदिश है और $\overrightarrow{OP}$, बिन्दु $P(x, y, z)$, का स्थिति सदिश इस प्रकार है कि $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AB}$. मान लीजिए $\overrightarrow{OP}$, x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः α, β एवं γ कोण बनाता है। α, β एवं γ सदिश $\overrightarrow{OP}$ के दिक् कोण और $\cos\alpha$, $\cos\beta$ एवं $\cos\gamma$ दिक् कोसाइन कहलाते हैं।



चित्र 34.27

क्योंकि $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{AB}$ है, इसलिए $\cos\alpha$, $\cos\beta$ एवं $\cos\gamma$, $\overrightarrow{AB}$ के भी दिक्–कोसाइन है।

किसी सदिश द्वारा x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बने कोणों के कोसाइन, उस सदिश के दिक्–कोसाइन कहलाते हैं।

- यदि $\overrightarrow{OP}$ की दिशा को उलटा कर दिया जाए, तो हम देखते हैं कि $\overrightarrow{PO}$, x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ एवं $\pi - \gamma$ कोण बनाता है। इसलिए $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$ and $\cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$, $\overrightarrow{PO}$ के दिक्– कोसाइन हैं। वास्तव में अंतरिक्ष में किसी भी सदिश को दो दिशाओं में बढ़ाया जा सकता है इसलिए प्रत्येक सदिश के दिक्–कोसाइन के दो समूह होते हैं। यदि ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) दिक्–कोसाइन का एक समूह है तो ($-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$) दूसरा समूह होगा। किसी भी सदिश के दिक्–कोसाइन के एक समूह को लेना ही पर्याप्त है।

- सामान्यतः एक सदिश के दिक्–कोसाइन को l, m एवं n से व्यक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$ एवं $n = \cos\gamma$.

- क्योंकि $\overrightarrow{OX}$ अक्षों $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ एवं $\overrightarrow{OZ}$ के साथ क्रमशः 0°, 90°, एवं 90° कोण बनाता है; इसलिए cos 0°, cos 90°, cos 90° अर्थात 1, 0, 0, x-अक्ष के, दिक्–कोसाइन हैं। दी गई आकृति में, मान लीजिए

  $|\overrightarrow{OP}| = r$ और $PA \perp OX$.

  अब समकोण त्रिभुज ΔOAP में, $\dfrac{OA}{OP} = \cos\alpha$

  i.e. $OA = OP\cos\alpha$ i.e. $x = r.l \Rightarrow \boxed{x = l\,r}$

  इसी प्रकार y एवं z अक्षों पर लम्ब खींचकर हम $y = mr$ एवं $z = nr$ प्राप्त कर सकते हैं।

  अब $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(l^2 + m^2 + n^2) \qquad \text{...(i)}$$

  परन्तु $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ अथवा $|\overrightarrow{OP}|^2 = x^2+y^2+z^2 = r^2$

  इसलिए (i) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

  इसके अतिरिक्त, $l = \dfrac{x}{r}$, $m = \dfrac{y}{r}$, $n = \dfrac{z}{r}$

  अर्थात् $l = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $m = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $n = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

  अतः, यदि $P(x, y, z)$, अंतरिक्ष में एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन

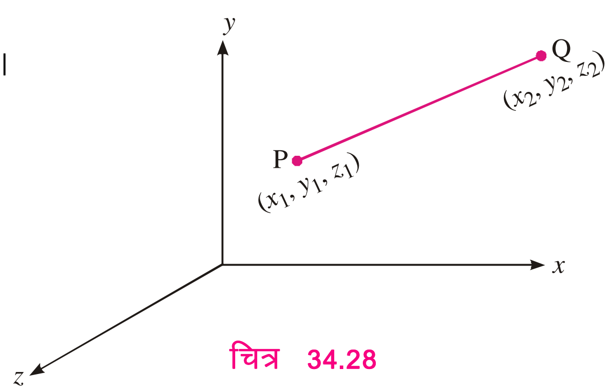
  $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ हैं।

34.11.1 दो बिन्दुओं को मिलाने वाले सदिश के दिक्–कोसाइन

संलग्न आकृति में, $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाकार सदिश $\overrightarrow{PQ}$ बनाया गया है। यदि हम निर्देशांक अक्षों की दिशा को परिवर्तित किए बिना मूल बिन्दु को बिन्दु $P(x_1,y_1,z_1)$ पर स्थानांतरित कर दें, तो बिन्दु Q के निर्देशांक $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ हो जाते हैं। इसलिए $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–कोसाइन

$$\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}, \quad \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$ हैं।



चित्र 34.28

34.11.2 सदिश के दिक्-अनुपात

ऐसी तीन वास्तविक संख्याएँ जो सदिश के दिक्–कोसाइनों के समानुपाती हैं, सदिश के दिक्–अनुपात कहलाती हैं। मान लीजिए l, m, n एक सदिश के दिक्–कोसाइन और a, b, c दिक्–अनुपात हैं,

तो, $\dfrac{a}{l}=\dfrac{b}{m}=\dfrac{c}{n}=\lambda$ (मान लीजिए)

$\Rightarrow \quad a=\lambda l, b=\lambda m, c=\lambda n$

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2=\lambda^2(l^2+m^2+n^2)$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 = a^2+b^2+c^2$

अर्थात् $\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$\therefore \quad l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, n=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- यदि a, b, c किसी सदिश के दिक्–अनुपात हैं तो प्रत्येक $\lambda \neq 0$, के लिए $\lambda a, \lambda b$ एवं λc भी सदिश के दिक्–अनुपात हैं। अतः एक सदिश के अनन्त दिक्–अनुपात होते हैं।
- यदि $P(x,y,z)$ अंतरिक्ष में एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–अनुपात x, y, z हैं।
- यदि $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ अंतरिक्ष में दो बिन्दु हैं, तो $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–अनुपात $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ हैं।
- $l^2+m^2+n^2 = 1$ परन्तु, व्यापकतः $a^2+b^2+c^2 \neq 1$.

उदाहरण 34.19. मान लीजिए अंतरिक्ष में एक बिन्दु P इस प्रकार है कि $OP=\sqrt{3}$ और $\overrightarrow{OP}$, x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः $\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}$ कोण बनाता है। बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन $\cos\dfrac{\pi}{3},\cos\dfrac{\pi}{4},\cos\dfrac{\pi}{3}$ i.e. $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ बिन्दु P के निर्देशांक $x = lr=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$y = mr=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z = nr=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ हैं।

उदाहरण 34.20. यदि $P(1, 2, -3)$ अंतरिक्ष में एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल :

$$l = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$m = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$n = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

उदाहरण 34.21. क्या $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ किसी सदिश के दिक्–कोसाइन हो सकते हैं?

हल : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{3} \neq 1$

इसलिए $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ किसी सदिश के दिक्–कोसाइन नहीं हो सकते।

उदाहरण 34.22. यदि P(2, 3, –6) एवं Q(3, –4, 5) अंतरिक्ष में दो बिन्दु हैं, तो $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{QO}$ तथा $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए, जबकि O मूल बिन्दु है।

हल : $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन $\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}, \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}, \frac{-6}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}$

i.e. $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{-6}{7}$.

इस प्रकार $\overrightarrow{QO}$ के दिक्–कोसाईन $\frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}$ हैं।

$\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–कोसाइन, $\frac{3-2}{\sqrt{(3-2)^2+(-4-3)^2+(5+6)^2}}$,

$\frac{-4-3}{\sqrt{(3-2)^2+(-4-3)^2+(5+6)^2}}, \frac{5+6}{\sqrt{(3-2)^2+(-4-3)^2+(5+6)^2}}$ हैं।

अर्थात $\frac{1}{\sqrt{171}}, \frac{-7}{\sqrt{171}}, \frac{11}{\sqrt{171}}$ हैं।

उदाहरण 34.23. एक ऐसे सदिश के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जो तीनों अक्षों के साथ समान कोण बनाता है।

हल : मान लीजिए, वह सदिश $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ तथा $\overrightarrow{OZ}$ में से प्रत्येक के साथ α कोण बनाता है।

$\therefore \quad \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

अर्थात $\quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ उस सदिश के दिक्–कोसाइन $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ हैं।

उदाहरण 34.24. यदि P(1, 2, –3) एवं Q(4, 3, 5) अंतरिक्ष में दो बिन्दु हैं तो, $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{QO}$ तथा $\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि O मूल बिंदु है।

हल : $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–अनुपात 1, 2, –3 हैं।

$\overrightarrow{QO}$ के दिक्–अनुपात (–4, –3, –5) अथवा (4, 3, 5)

$\overrightarrow{PQ}$ के दिक्–अनुपात 4 –1, 3 –2, 5 – (–3)

अर्थात् 3, 1, 8 हैं।

देखें आपने कितना सीखा 34.6

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :
   (i) y-अक्ष के दिक्–कोसाइन .... हैं।
   (ii) यदि l, m, n किसी सदिश के दिक्–कोसाइन है, तो $l^2 + m^2 + n^2 =$ ....
   (iii) यदि a, b, c किसी सदिश के दिक्–अनुपात हैं, तो $a^2 + b^2 + c^2$, 1 के .... हैं।
   (iv) निर्देशांक अक्षों के साथ समान कोण बनाने वाले सदिश के दिक्–कोसाइन........... हैं।
   (v) यदि दो सदिश परस्पर समान्तर हैं, तो उनके दिक्–अनुपात .... है।
   (vi) (1, –1, 1) किसी भी सदिश के दिक्–कोसाइन नहीं हैं क्योंकि.............
   (vii) एक सदिश के दिक्–अनुपातों की संख्या .... हैं (सीमित/असीमित)
2. यदि P(3, 4, –5) अंतरिक्ष में एक बिन्दु है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।
3. $\overrightarrow{AB}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जहाँ A(–2, 4, –5) तथा B(1, 2, 3) अंतरिक्ष में दो बिन्दु हैं।
4. यदि कोई सदिश x, y, z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः 90°, 135° तथा 45° कोण बनाता है, तो सदिश के दिक्–अनुपात ज्ञात कीजिए।

34.12 सदिशों का गुणनफल

अनुच्छेद 34.6 में, आपने एक सदिश को अदिश से गुणा किया। सदिश को अदिश से गुणा करने पर, हमें एक सदिश मिलता है। इस अनुच्छेद में, हम एक सदिश को दूसरे सदिश से गुणा करने के स्थिति पर विचार करेंगें। इसके दो प्रकार हैं:

(i) जब दो सदिशों का गुणनफल एक अदिश हो, तो इसे हम अदिश गुणनफल कहते हैं। यह डाट (बिंदु) गुणनफल भी कहलाता है, क्योंकि इसमें संबधित संकेत '.' प्रयोग किया जाता है।

(ii) जब दो सदिशों का गुणनफल एक सदिश हो, तो इसे हम सदिश गुणनफल कहते हैं, जो कि संबधित संकेत '×' के प्रयोग करने से क्रास गुणनफल भी कहलाता है।

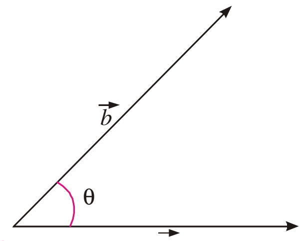
34.13 सदिशों का अदिश गुणनफल

माना $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो ऐसे सदिश हैं, जिनके बीच का कोण θ है।

अदिश गुणनफल $\vec{a}.\vec{b}$ को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

स्पष्टतः $\vec{a}\cdot\vec{b}$ एक अदिश है, क्योंकि $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ तथा $\cos\theta$ सभी अदिश हैं।



चित्र 34.29

टिप्पणी

1. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समदिश सदिश हो तो, $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta = ab$ होगा, जबकि a तथा b क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण हैं।
2. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ विपरीत दिशाओं में हैं, तो $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\pi = -ab$ होगा।
3. सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ से प्राप्त किया जा सकता है।
4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ तथा $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})$
5. $n(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (n\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(n\vec{b})$, जबकि n कोई वास्तविक संख्या है।
6. $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ तथा $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$ होता है, क्योंकि $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ परस्पर लाम्बिक एकक सदिश हैं।

उदाहरण 34.25. यदि $\vec{a} = 3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ है, तो $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ज्ञात कीजिए। $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण भी ज्ञात कीजिए।

हल : $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\cdot(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$

$$= 3\times4 + 2\times(-3) + (-6)\times1$$

$$\left[\because\ \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \text{ और } \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0\right]$$

$$= 12 - 6 - 6 = 0$$

मान लीजिए $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है।

तब, $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = 0 \quad \therefore\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

34.14 दो सदिशों का सदिश गुणनफल

इससे पहले कि हम दो सदिशों के सदिश गुणनफल को परिभाषित करें, हम नीचे दक्षिणहस्त पेंच और वामहस्त पेच पर चर्चा करते हैं तथा इसे सदिश त्रिक से संबंधित करते हैं।

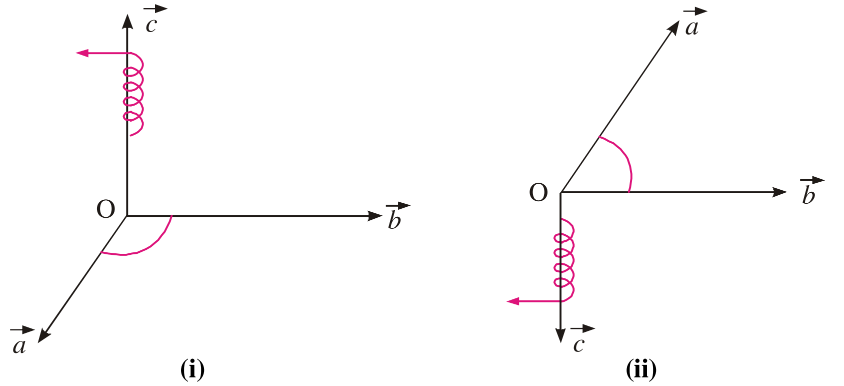
34.14.1 दक्षिणहस्त पेंच

यदि एक पेंच लिया जाए तथा इसे घड़ी की सुइयों की विपरीत(वामावृत) दिशा में घुमाएं, तो इसका पढ़ने वाले की ओर स्थानान्तरण होता है। इसे दक्षिणहस्त पेंच कहते हैं।

यदि एक पेंच लिया जाए तथा इसे घड़ी की सुइयों की दिशा में (दक्षिणावृत) घुमाया जाए, तो इसका पढ़ने वाले से दूर की ओर स्थानान्तरण होता है। इसे वामहस्त पेंच कहते हैं।

अब हम इस पेंच का संबन्ध दिए गए क्रमित सदिश त्रिक से जोड़ते हैं।

माना $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन सदिश हैं, जिनका आदि बिन्दु O है।



चित्र 34.30

अब यदि एक दक्षिणहस्त पेंच को O पर रख कर $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की ओर $<180°$ के कोण पर घुमाया जाए तो इसका $\vec{c}$ के अनुदिश स्थानान्तरण होगा (चित्र 34.30 (i))।

इसी प्रकार, यदि एक वामहस्त पेंच को O पर रख कर $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की ओर $<180°$ घुमाया जाए, तो इसका $\vec{c}$ के अनुदिश स्थानान्तरण होगा (चित्र 34.30 (ii)) परन्तु इस बार स्थानान्तरण की दिशा पहली दिशा से विपरीत होगी।

इसालिए $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ का एक क्रमित सदिश त्रिक, दक्षिणहस्त वामहस्त कहलाता है, यदि वह 180° से कम के कोण पर घुमाने पर $\vec{c}$ की दिशा में या $\vec{c}$ की विपरीत दिशा में चलता है।

34.14.2 सदिशों का सदिश गुणनफल

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो शून्येतर सदिश हैं, तो उनका सदिश गुणनफल $\vec{a} \times \vec{b}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है और इसे $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta.\hat{n}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

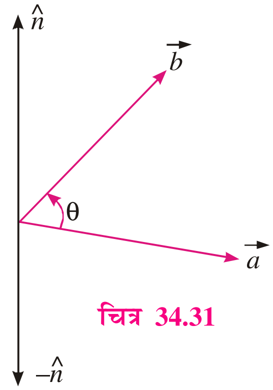
जहाँ θ, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य बना हुआ कोण है, $0 \le \theta \le \pi$ और $\hat{n}$ एक ऐसा मात्रक सदिश है जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब है। $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\hat{n}$ एक दक्षिणावर्ती पद्धति को निर्मित करते हैं। अर्थात दक्षिणावर्ती पद्धति $\vec{a}$ से $\vec{b}$ की तरफ घुमाने पर यह $\hat{n}$ की दिशा में चलती है।

- $\vec{a} \times \vec{b}$ एक सदिश है तथा $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ है।
- यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा $\vec{b} = \vec{0}$ हो, तो θ परिभाषित नहीं है और इस स्थिति में $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ लेते हैं।
- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ शून्यतेर सदिश हैं, तो $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ यदि और केवल यदि है, जब $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ संरेख अथवा समान्तर सदिश हैं अर्थात $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.
- विशिष्टतः $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$ और $\vec{b} \times (-\vec{b}) = \vec{0}$ क्योंकि प्रथम स्थिति में θ = 0 और द्वितीय स्थिति में θ = π. इस प्रकार दोनों ही स्थितियों में sinθ = 0 हो जाता है।

- $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$
- $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$ तथा $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$,

  $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i},\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$.
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$
- $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.
- दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य बना कोण θ,

  $\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ द्वारा प्राप्त होता है।



चित्र 34.31

- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ किसी त्रिभुज की संलग्न भुजाओं का निरूपित करते हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ द्वारा प्रदत्त है।
- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं तो समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $|\vec{a}\times\vec{b}|$ द्वारा प्रदत्त है।
- यदि $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तथा $\hat{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, तो

$$\hat{a}\times\hat{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

- $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् मात्रक सदिश $\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ है।

उदाहरण 34.26. सदिश गुणनफल के प्रयोग से, सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix} = \hat{i}(1-6)-\hat{j}(2+9)+\hat{k}(-4-3)$$

$$= -5\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+121+49}=\sqrt{195}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{14}.\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{195}}{14}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{195}}{14}\right)$$

उदाहरण 34.27. सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2+3) - \hat{j}(-3+3) + \hat{k}(3-2)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} + \hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लम्बवत् मात्रक सदिश $= \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \dfrac{\hat{i} + \hat{k}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

उदाहरण 34.28. एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) तथा C(2, 3, 1) हैं।

हल :
$$\overrightarrow{AB} = (1-1)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (3-1)\hat{k} = \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-1)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (1-1)\hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-4) - \hat{j}(0-2) + \hat{k}(0-1)$$

$$= -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\therefore \qquad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 34.29. एक ऐसे समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, A(5, –1, 1), B(–1, –3, 4), C(1, –6, 10) तथा D(7, –4, 7) हैं।

हल :
$$\overrightarrow{AB} = (-1-5)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (4-1)\hat{k} = -6\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = (7-5)\hat{i} + (-4+1)\hat{j} + (7-1)\hat{k} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12+9) - \hat{j}(-36-6) + \hat{k}(18+4)$$

$$= -3\hat{i} + 42\hat{j} + 22\hat{k}$$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+1764+484} = \sqrt{2257}$ वर्ग इकाई

देखें आपने कितना सीखा 34.7

1. (i) यदि $\vec{a}\times\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है तथा $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{3}$, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य बना हुआ कोण .... है।

   (ii) यदि $|\vec{a}.\vec{b}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$ है, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मध्य बना हुआ कोण .... है।

   (iii) $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k})+\hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k})+\hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान .... है।

2. $(\vec{a}+\vec{b})$ तथा $(\vec{a}-\vec{b})$ दोनों के लम्वबत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$.

3. एक ऐसे समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिशों $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।

4. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a}+\lambda\vec{b}, \vec{c}$ पर लम्बवत् है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

34.15 अदिश त्रिक गुणनफल

यदि $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन सदिश हैं तो $\vec{a}\times\vec{b}$ का $\vec{c}$ के साथ अदिश गुणनफल, अदिश त्रिक गुणनफल कहलाता है। $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$ को $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ का अदिश त्रिक गुणनफल कहते हैं। सामान्यतः इसे $[\vec{a}.\vec{b}\vec{c}]$ से व्यक्त किया जाता है।

- $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ एक अदिश राशि है।
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$ एक ऐसे समांतर षटफलक के आयतन को व्यक्त करता है जिसके सहावसानी किनारे $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ द्वारा निरूपित हैं।
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=0$, यदि $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय सदिश हैं अथवा तीनों में से कोई दो सदिश समान अथवा समान्तर हैं।
- यदि सदिशों का चक्रीय क्रम बनाए रखा जाए तो अदिश त्रिक गुणनफल में डॉट (.) और क्रास (×) की स्थिति को परस्पर परिवर्तित किया जा सकता है।

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a} = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b} = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$

- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b}$
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a}).\vec{c}=-\vec{c}.(\vec{b}\times\vec{a})$

$(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a} = -(\vec{c}\times\vec{b}).\vec{a} = -\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$

$(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b} = -(\vec{a}\times\vec{c}).\vec{b} = -\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})$

- यदि $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}, \vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}, \vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ हैं,

तो $$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- चार बिन्दु A, B, C तथा D समतलीय होते हैं यदि $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ तथा $\overrightarrow{AD}$ समतलीय हैं अर्थात्

$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} = 0$

उदाहरण 34.30. एक ऐसे समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके किनारे $\vec{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।

हल : $$\text{आयतन} = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1)+3(2+3)+4(-1-6)$$

$$= 6+15-28 = -7$$

ऋणात्मक चिन्ह को छोड़ते हुए, अभीष्ट आयतन = 7 घन इकाई

उदाहरण 34.31. λ का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए सदिश

$\vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, b = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}, c = 3\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$ समतलीय हैं।

हल : सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय होंगे, यदि $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$

i.e. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 0$$

i.e. $2(10+3\lambda)+1(5+9)+1(\lambda-6) = 0$

i.e. $7\lambda+28 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -4.$

उदाहरण 34.32. दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C तथा D जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}), (-\hat{j}-\hat{k}), (3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k})$ तथा $(-4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k})$ हैं, समतलीय हैं।

हल : $$\overrightarrow{AB} = -4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = -\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = -8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\,.\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4(12+3)+6(-3+24)-2(1+32)$$

$$= -60+126-66=0$$

अतः बिन्दु A, B, C तथा D समतलीय हैं।

उदाहरण 34.33. सिद्ध कीजिए कि $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]=2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

हल : बायाँ पक्ष $= (\vec{a}+\vec{b})\,.\,[(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})]$

$= (\vec{a}+\vec{b})\,.\,[(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]$

$= (\vec{a}+\vec{b})\,.\,[(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}]$ $\quad \because\ \vec{c}\times\vec{c}=0$

$= \vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}\,.\,(\vec{c}\times\vec{a})$

$+\vec{b}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\,.\,(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}\,.\,(\vec{c}\times\vec{a})$

$= \vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\,.\,(\vec{c}\times\vec{a})$ [$\because$ जब दो सदिश समान हों, तो अदिश त्रिक गुणनफल शून्य होता है]

$= 2[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}]$

= दायाँ पक्ष

देखें आपने कितना सीखा 34.8

1. एक ऐसे समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके किनारे $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।
2. λ का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए सदिश $\vec{a}=-4\hat{i}-6\hat{j}+\lambda\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ समतलीय हैं।

आइये दोहराएँ

- वह भौतिक राशि जिसे केवल एक संख्या द्वारा प्रकट किया जा सकता है, अदिश कहलाती है।
- वह राशि, जिसका परिमाण तथा दिशा दोनों हों, सदिश कहलाती है।
- सदिश, जिसका परिमाण 'a' तथा दिशा A से B की ओर हो, को $\overrightarrow{AB}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा इसका परिमाण $|\overrightarrow{AB}|=a$ द्वारा प्रकट किया जाता है।
- एक सदिश जिसका परिमाण दूसरे सदिश $\vec{a}$ के परिमाण के बराबर है, परन्तु दिशा विपरीत है, दिये गये सदिश का ऋण कहलाता है तथा इसे $-\vec{a}$ द्वारा दर्शाते हैं।

- एकक सदिश का परिणाम 1 इकाई होता है। सदिश $\vec{a}$ के समान्तर एकक सदिश को $\hat{a}$ द्वारा दर्शाते हैं तथा यह $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ के बराबर होता है।
- शून्य सदिश $\vec{0}$ का परिमाण 0 होता है तथा इसकी कोई निश्चित दिशा नहीं होती।
- अदिशों के योग से भिन्न, सदिशों का योग सदिशों के योग के त्रिभुज नियम के अनुसार होता है। इसी कारण दो सदिशों के योग का परिमाण उनके परिमाणों के योग से कम या बराबर होता है।
- दो या अधिक सदिश संरेख होते हैं, यदि उनके आधार एक ही हों या समान्तर हों।
- तीन या अधिक सदिश समतलीय होते हैं, यदि उनके आधार एक ही तल के समान्तर हों या एक ही तल में स्थित हों।
- यदि $\vec{a}$ सदिश और x अदिश हो, तब $x\vec{a}$ एक ऐसा सदिश है, जिसका परिमाण सदिश $\vec{a}$ के परिमाण का x गुना है तथा जिसकी दिशा वही या विपरीत इस पर निर्भर करती है कि $x > 0$ या $x < 0$ है।
- किसी सदिश को जो दो असंरेख सदिशों के साथ समतलीय है, उनके एक रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
- अंतरिक्ष में किसी सदिश को दिये गए तीन असमतलीय सदिशों के एक रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जात सकता है।
- एक बिन्दु का स्थिति सदिश, जो दो बिन्दुओं, जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है, को मिलाने वाले रेखाखण्ड को m : n के अन्तः/बाह्य अनुपात में विभाजित करता है, क्रमशः निम्न हैं:
$$\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\ \frac{n\vec{a}-m\vec{b}}{n-m}$$
- दो बिन्दुओं, जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं, को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ होगा।
- दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का अदिश गुणनफल, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ से प्राप्त होता है, जबकि θ, दोनो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है।
- दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का सदिश गुणनफल $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ से प्राप्त होता है। जबकि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है तथा $\hat{n}$ एक एकक सदिश है, जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ पर लम्बवत् है।
- एक सदिश द्वारा x, y एवं z अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बने कोणों के कोसाइन के मान उस सदिश के दिक्–कोसाइन कहलाते हैं।
- ऐसी तीन वास्तविक संख्याएँ जो किसी सदिश के दिक्–कोसाइनों के समानुपाती हैं, उस सदिश के दिक् अनुपात कहलाती हैं।
- सामान्यतः किसी सदिश के दिक्–कोसाइनों को l, m, n तथा दिक्–अनुपातों को a, b, c से व्यक्त करते हैं।
- $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, परन्तु व्यापकतः $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$.

- यदि $\overrightarrow{AB} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है, तो $\overrightarrow{AB}$ के दिक्–अनुपात x, y, z हैं तथा दिक्–कोसाइन $\frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\pm z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ हैं।
- एक सदिश के दिक्–कोसाइन अद्वितीय हैं तथा दिक्–अनुपात अनन्त हैं।
- दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का सदिश गुणनफल, $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta.\hat{n}$ द्वारा परिभाषित होता है जहाँ θ, सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ के बीच का कोण तथा $\hat{n}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब मात्रक सदिश हैं।
- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.
- $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ यदि $\vec{a} = 0$ अथवा $\vec{b} = 0$ अथवा $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान्तर हैं अथवा $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ संरेख हैं।
- $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$
- $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}, \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}, \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$.
- $\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}, \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}, \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$.
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$
- $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$
- $\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ त्रिभुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं।
- समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $|\vec{a}\times\vec{b}|$ जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाओं को निरूपित करते हैं।
- $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब मात्रक सदिश $\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ द्वारा प्राप्त होता है।
- यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ तो $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
- यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हैं तो $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$ अदिश त्रिक गुणनफल कहलाता है और सामान्यतः इसे $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ से व्यक्त करते हैं।
- समान्तर षट्फलक का आयतन $= (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$, जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समान्तर षट्फलक के सहावसानी किनारे हैं।

- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=0$, यदि $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय हैं अथवा तीनों में से कोई दो सदिश समान है अथवा समान्तर हैं।
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a}).\vec{b}$
- $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a}).\vec{c}$
- यदि $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ तथा $\overrightarrow{AD}$ समतलीय हैं तो चार बिन्दु A, B, C तथा D भी समतलीय होंगे i.e. यदि $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}=0$, तो A, B, C, D समतलीय हैं।
- यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}, \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}, \vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$, तो

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

सहायक वेबसाइट

- *www.youtube.com/watch?v=ihNZlp7iUHE*
- *http://emweb.unl.edu/math/mathweb/vectors/vectors.html*
- *http://www.mathtutor.ac.uk/geometry_vectors*
- *www.khanacademy.org/.../introduction-to-vectors-and-scalars*

आइए अभ्यास करें

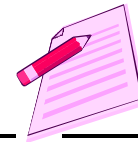
1. माना $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन ऐसे सदिश हैं कि इनमें से कोई दो असंरेख हैं। यदि सदिश $\vec{a}+\vec{b}$ और सदिश $\vec{c}$ संरेख हों तथा सदिश $\vec{b}+\vec{c}$ और सदिश $\vec{a}$ संरेख हों, तो सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ का योग ज्ञात कीजिए।

2. सिद्ध कीजिए कि कोई दो शून्येतर सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ संरेख होते हैं, यदि और केवल यदि, दो संख्याएँ x और y (दोनों इकट्ठे शून्य नहीं हैं) इस प्रकार हैं कि $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ हो।

3. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें भुजा CD का मध्य-बिन्दु M है। सदिशों $\overrightarrow{BD}$ और $\overrightarrow{AM}$ को सदिशों $\overrightarrow{BM}$ और $\overrightarrow{MC}$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

4. क्या सदिश $\vec{a}-\vec{b}$ की लम्बाई सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ की लम्बाइयों के योग से (i) कम हो सकती है, (ii) बराबर हो सकती है या (iii) अधिक हो सकती है?

5. माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो असंरेख सदिश हैं। संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए, यदि सदिश $(2-x)\vec{a}+\vec{b}$ और $y\vec{a}+(x-3)\vec{b}$ बराबर हैं।



6. सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ असंरेख हैं। x ज्ञात कीजिए, यदि सदिश $3\vec{a}+x\vec{b}$ और $(1-x)\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ समान्तर हैं।

7. x और y ज्ञात कीजिए, जिससे सदिश $\vec{a}=-2\hat{i}+3\hat{j}+y\hat{k}$ तथा सदिश $\vec{b}=x\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ संरेख हों। $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण भी ज्ञात कीजिए।

8. सदिशों $\vec{a}+\vec{b}$ और $\vec{a}-\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि $\vec{a}=3\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k}$ और $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ है।

9. सदिश $\vec{a}$ की दिशा में एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{a}=-6\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ है।

10. सदिशों $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ और $-2\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$ के परिणामी सदिश के समान्तर एक एकक सदिश ज्ञात कीजिए।

11. किसी कण P पर निम्न बल लगे हैं :

$\vec{F_1}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{F_2}=-3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{F_3}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, जिन्हें न्यूटन में मापा गया है।

(a) परिणामी बल ज्ञात कीजिए। (b) परिणामी बल का परिमाण ज्ञात कीजिए।

12. दिखाइये कि निम्न सदिश समतलीय हैं:

$(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})$, $(2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$ और $(-3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$, जबकि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ कोई तीन असमतलीय सदिश हैं।

13. एक सदिश $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ के साथ क्रमशः $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ कोण बनाता है। इस सदिश द्वारा $\overrightarrow{OZ}$ के साथ बनाया हुआ कोण ज्ञात कीजिए।

14. यदि अंतरिक्ष में एक बिन्दु $P(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ है, तो $\overrightarrow{OP}$ के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए जहाँ O मूल बिन्दु है।

15. बिन्दुओं (–4,1,7) तथा (2, –3, 2) को मिलाने वाले सदिश के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

16. दिक् अनुपातों की अवधारणा के प्रयोग से दर्शाइए कि $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$ जहाँ P, Q, R तथा S के निर्देशांक क्रमशः (0, 1, 2), (3, 4, 8), $\left(-2, \frac{3}{2}, -3\right)$ तथा $\left(\frac{5}{2}, 6, 6\right)$ हैं।

17. यदि किसी सदिश के दिक्–अनुपात 3, 4, 0 हैं, तो इसके दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

18. एक ऐसे समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।

19. एक त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि A, B, C के निर्देशांक क्रमशः (3, –1, 2), (1, –1, –3) तथा (4, –3, 1) हैं।

20. सदिशों $2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}$ के लम्बवत् एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

21. यदि $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}$ तथा $\vec{B}=\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$, तो $(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B})$ ज्ञात कीजिए।

22. सिद्ध कीजिए कि : $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$.

23. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ और $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$, तो दर्शाइए कि $(\vec{a}-\vec{d})$ तथा $(\vec{b}-\vec{c})$ परस्पर समान्तर हैं।

24. एक ऐसे समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके किनारे, $\vec{a}=2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं।

25. दर्शाइए कि सदिश, $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ समतलीय हैं।

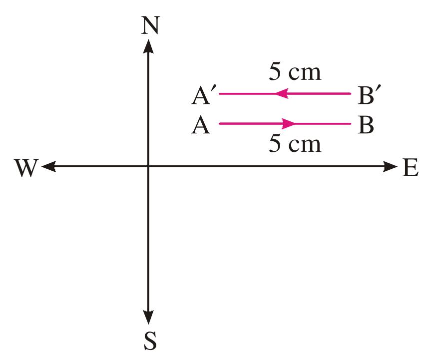
26. यदि बिन्दु A(3, 2, 1), B(4, λ, 5), C(4, 2, –2) तथा D(6, 5, –1) समतलीय हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 34.1

1. (d) 2. (b)

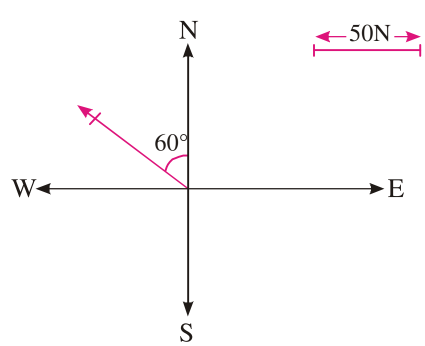
3.



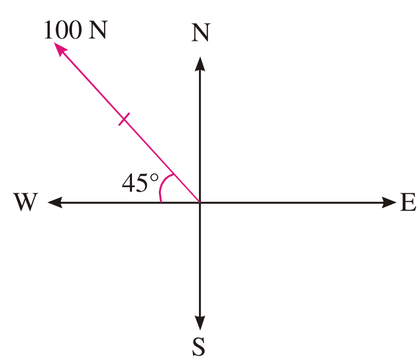
चित्र 34.32

4. दो सदिश समदिश कहलाते हैं, यदि उनकी दिशा वही हो, चाहे उनके परिमाण कुछ भी हों। परन्तु समान सदिशों में परिमाण और दिशा दोनों वही होने चाहिये।

5.



चित्र 34.33



चित्र 34.34

देखें आपने कितना सीखा 34.2

1. $\vec{0}$ 2. $\vec{0}$

देखें आपने कितना सीखा 34.3

1. $\vec{b} - \vec{a}$

2. (i) यह एक सदिश है जो $\vec{a}$ की दिशा में है तथा जिसका परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का 3 गुना है।

   (ii) यह $\vec{b}$ की विपरीत दिशा में एक सदिश है, जिसका परिणाम $\vec{b}$ के परिमाण का 5 गुना है।

3. $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

4. $|y\vec{n}| = y|\vec{n}|$, यदि $y > 0$
   $= -y|\vec{n}|$, यदि $y < 0$
   $= 0$, यदि $y = 0$

5. सदिश

6. $\vec{p} = x\vec{q}$, x एक शून्येतर सदिश है।

देखें आपने कितना सीखा 34.4

1. यदि x और y इस प्रकार हों कि $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

2. $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

3. $\overrightarrow{OP} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

5. $\frac{1}{7}\left(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}\right)$

6. $\frac{1}{\sqrt{51}}\hat{i} - \frac{5}{\sqrt{51}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{51}}\hat{k}$

देखें आपने कितना सीखा 34.5

1. (i) $\frac{1}{5}(2\vec{a} + 3\vec{b})$ (ii) $(3\vec{a} - 2\vec{b})$

2. $\frac{1}{7}(4\vec{p} + 3\vec{q})$

3. $\frac{1}{3}(2\vec{c} + \vec{d})$, $\frac{1}{3}(\vec{c} + 2\vec{d})$

देखें आपने कितना सीखा 34.6

1. (i) (0, 1, 0) (ii) 1 (iii) समान नहीं

   (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (v) समानुपाती

   (vi) उनके वर्गो का योग 1 के समान नहीं है (vii) अनन्त

2. $\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$

3. $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$

4. 0, –1, 1

देखें आपने कितना सीखा 34.7

1. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) 1

2. $\frac{-\hat{i}}{\sqrt{6}}+\frac{2\hat{j}}{\sqrt{6}}-\frac{\hat{k}}{\sqrt{6}}.$ 3. $\sqrt{42}$ वर्ग इकाई 4. 8

देखें आपने कितना सीखा 34.8

1. 42 घन इकाई 2. $\lambda = -2$

आइए अभ्यास करें

1. $\vec{a}+\vec{b}+c=\vec{0}$

3. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC}$

4. (i) हाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ या तो असरेख सदिश हैं या शून्येतर सदिश, जिनकी दिशा एक ही है।

(ii) हाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ या तो विपरीत दिशाओं में हैं या कम से कम एक शून्य सदिश है।

(iii) हाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ विपरीत दिशाओं में हैं।

5. x = 4, y = –2 6. x = 2, –1

7. x = 4, y = 1 $|\vec{a}| = \sqrt{14}, |\vec{b}| = 2\sqrt{14}$

8. $|\vec{a}+\vec{b}| = 6, |\vec{a}+\vec{b}| = 14$

9. $-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}-\frac{2}{7}\hat{k}$ 10. $\pm\frac{1}{3}(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

11. $2\hat{i}+\hat{j}; \sqrt{5}$

13. $\frac{\pi}{4}$ अथवा $\frac{3\pi}{4}$ 14. $\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 15. $\frac{6}{\sqrt{77}}, \frac{-4}{\sqrt{77}}, \frac{-5}{\sqrt{77}}$

17. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0$ 18. $8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई 19. $\frac{1}{2}\sqrt{165}$ वर्ग इकाई

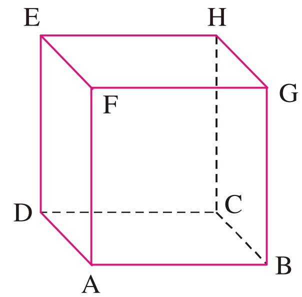
20. $\frac{7\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{75}}$ 21. $-60\hat{i}+4\hat{j}-22\hat{k}$ 24. 8 घन इकाई

26. $\lambda = 5$

35

समतल

अपने घर में एक कमरे को सूक्ष्मता से देखिये। इसकी चार दीवारें हैं, एक छत तथा एक फर्श है। फर्श तथा छत दो समान्तर समतलों के भाग हैं, जो अपनी सीमा से अपरिमित रूप से फैले हुए हैं। आप समान्तर दीवारों के दो युग्म भी दखेगें, जो समान्तर समतलों के भाग हैं। इसी प्रकार, मेंजों के टाप (ऊपरी पृष्ठ), कमरों के दरवाजे, इत्यादि समतलों के भागों के उदाहरण हैं।



चित्र 35.1

यदि हम किसी समतल में दो बिन्दु लें, तो इनको मिलाने वाली रेखा पूरी की पूरी समतल में स्थित होती है। यह समतल की विशेषता है।

चित्र 35.1 को देखिये। आप जानते हैं कि यह एक आयताकार डिब्बे को प्रदर्शित करता है। इसके 6 फलक हैं, आठ शीर्ष तथा 12 किनारे हैं। विपरीत और समान्तर फलकों के युग्म हैं:

(प) ABCD और FGHE

(ii) AFED और BGHC

(iii) ABGF और DCHE

तथा समान्तर किनारों के समुच्चय निम्न हैं:

(i) AB, DC, EH और FG

(ii) AD,BC, GH और FE

(iii) AF, BG, CH और DE

ऊपर दिये गए 6 फलकों में से प्रत्येक समतल (तल) का एक भाग है और यहाँ समान्तर समतलों के तीन युग्म हैं जिन्हें विपरीत फलक निरूपित करते हैं।

इस पाठ में हम एक समतल का व्यापक समीकरण निकालेंगे, तीन बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण, समतल के समीकरण का अन्त:खण्ड स्वरूप तथा समतल के समीकरण का अभिलम्ब स्वरूप ज्ञात करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- एक समतल को पहचानना
- एक समतल का अभिलंब रूप में समीकरण स्थापित करना
- एक दिए गये बिन्दु से होकर जाने वाले समतल का व्यापक समीकरण ज्ञात करना

- तीन दिये गए बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करना
- अंत:खण्ड स्वरूप और अभिलंब स्वरूप में समतल के समीकरण करना
- दो समतलों के बीच का कोण ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- त्रिविम (त्रिविमीय) ज्यामिति का मूल ज्ञान
- एक रेखा की दिक-कोज्याएँ और दिक-अनुपात
- एक रेखाखंड का अन्य रेखा पर प्रक्षेप
- आकाश में दो रेखाओं के लम्ब अथवा समान्तर होने के लिए प्रतिबन्ध

35.1 समतल का सदिश समीकरण

एक समतल को अद्बितीय रूप से ज्ञात किया जा सकता है यदि निम्नलिखित में से कोई एक ज्ञात है :

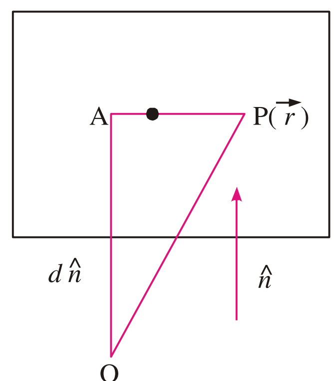
(i) समतल का अभिलंब और मूल बिन्दु से समतल की दूरी।

(ii) समतल का अभिलंब और समतल पर एक बिन्दु, दिया है।

(iii) यह दिए गए तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर जाता है।

35.2 अभिलंब रूप में समतल का समीकरण

मान लीजिए मूल बिन्दु O से समतल की दूरी (OA) d है और $\hat{n}$, समतल के अभिलंब मात्रक सदिश है। क्योंकि OA, मूल बिन्दु O से समतल की लम्बवत् दूरी है और $\hat{n}$ समतल पर लम्ब मात्रक सदिश है :



चित्र 35.2

$\therefore \qquad \overrightarrow{OA} = d\hat{n}$ ...(1)

अब $\qquad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - d\hat{n}$ ...(2)

$\overrightarrow{OA}$ समतल पर लम्ब है और $\overrightarrow{AP}$ समतल में स्थित है,

इसलिए $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AP}$

$\Rightarrow \qquad \overrightarrow{AP} . \overrightarrow{OA} = 0$

i.e. $\qquad (\vec{r} - d\hat{n}).\hat{n} = 0$

i.e. $\qquad \vec{r}.\hat{n} - d = 0$

i.e. $\qquad \vec{r}.\hat{n} = d$ ...(3)

यह समतल के समीकरण का सदिश रूप है।

35.3 समतल के समीकरण के सदिश रूप को कार्तीय रूप में परिवर्तित करना

मान लीजिए बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं और l, m, n मात्रक सदिश $\hat{n}$ के दिक्–कोसाइन हैं।

तब $$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

$$\hat{n} = l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}$$

$\vec{r}$ तथा $\hat{n}$ का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}).(l\hat{i}+m\hat{y}+n\hat{k}) = d$$

$$\Rightarrow \qquad lx+my+nz = d$$

जो कि समतल के अभिलंब रूप समीकरण का संगत कार्तीय रूप है।

टिप्पणी: समीकरण (3) में यदि $\vec{r}.\vec{n}=d$ समतल का समीकरण है, तो d समतल की मूल बिन्दु से दूरी नहीं है। समतल की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करने के लिए हमें दोनों पक्षों को $|\vec{n}|$ से विभाजित कर, $\vec{n}$ को $\hat{n}$ में परिवर्तित करना पड़ेगा। इसलिए $\dfrac{d}{|\vec{n}|}$ समतल की मूल बिन्दु से दूरी है।

उदाहरण 35.1. समतल $\vec{r}.(6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})-1=0$ की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए। समतल पर लम्ब मात्रक सदिश के दिक्–कोसाइन भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को $\vec{r}.(6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}) = 1$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$$|6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}| = \sqrt{36+9+4}=7$$

दिए हुए समीकरण के दोनों पक्षों को 7 से भाग करने पर

$$\frac{\vec{r}.(6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})}{7} = \frac{1}{7}$$

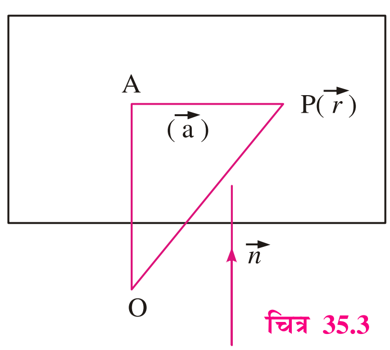
i.e. $$\vec{r}.\left(\frac{6}{7}\hat{i}-\frac{3}{7}\hat{j}-\frac{2}{7}\hat{k}\right) = \frac{1}{7}$$

इसलिए समतल की मूल बिन्दु से दूरी $= \dfrac{1}{7}$ इकाई

समतल के अभिलंब मात्रक सदिश के दिक्–कोसाइन $\dfrac{6}{7}, \dfrac{-3}{7}, \dfrac{-2}{7}$ हैं।

35.4 दिए हुए बिन्दु से होकर जाने वाले एवं दिए हुए सदिश के अभिलम्ब समतल का समीकरण

मान लीजिए, दिए हुए बिन्दु A का स्थिति सदिश $\vec{a}$ है तथा $\vec{r}$ समतल पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश है। $\vec{n}$ समतल पर लम्ब एक सदिश है।



चित्र 35.3

अब $$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA} = \vec{r}-\vec{a}$$

अब $$\vec{n}\perp(\vec{r}-\vec{a})$$

$$\therefore \qquad (\vec{r}-\vec{a}).\vec{n} = 0 \qquad ...(4)$$

यह व्यापक रूप में समतल का सदिश समीकरण है।

35.5 कार्तीय रूप

मान लीजिए बिन्दु A के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) तथा बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं। इसके अतिरिक्त a, b, c अभिलंब सदिश $\vec{n}$ के दिक्–अनुपात हैं।

तब
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$
$$\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

$\vec{r}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{n}$ के मानों को समीकरण (4) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$\{(x - x_1)i + (y - y_1)j + (z - z_1)k\}.\{ai + bj + ck\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1 = d \text{ (मान लीजिए)}$$

जो कि समतल का व्यापक समीकरण है।

उदाहरण 35.2. एक (5, 5, –4) से होकर जाने वाले तथा 2, 3, –1 दिक् अनुपात वाली रेखाओं के लम्बवत् समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $\vec{a} = 5\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

तथा $\vec{n} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ समतल का समीकरण है $\left(\vec{r} - (5\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k})\right).(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$

35.6 तीन असरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

(a) सदिश रूप:

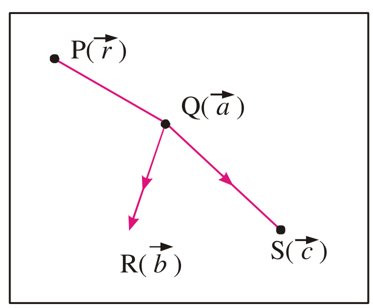
मान लीजिए बिन्दुओं Q, R तथा S के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं। इसके अतिरिक्त समतल पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

सदिश $\overrightarrow{QR} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{QS} = \vec{c} - \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{QP} = \vec{r} - \vec{a}$ एक ही तल में स्थित हैं और $\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS}$ एक ऐसा सदिश है जो $\overrightarrow{QR}$ तथा $\overrightarrow{QS}$ दोनों पर लम्ब है। इसलिए $\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{QP}$ पर भी लम्ब है।

$$\therefore \quad \overrightarrow{QP}.(\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS}) = 0$$

$$(\vec{r} - \vec{a}).\{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\} = 0 \quad \ldots(5)$$

यह समतल का सदिश समीकरण है।



चित्र 35.4

(b) कार्तीय रूप:

मान लीजिए बिन्दु P, Q, R तथा S के निर्देशांक क्रमशः (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) हैं।

$$\therefore \quad \overrightarrow{QP} = \vec{r} - \vec{a} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QR} = \vec{b} - \vec{a} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QS} = \vec{c} - \vec{a} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$$

इनके मान समीकरण (5) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(6)$$

यह समतल का कार्तीय रूप में समीकरण है।

उदाहरण 35.3. बिन्दुओं Q(2, 5, –3), R(–2, –3, 5) तथा S(5, 3, –3) से होकर जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए, $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ क्रमशः Q, R तथा S के स्थिति सदिश हैं और $\vec{r}$ समतल पर किसी स्वेच्छ बिन्दु का स्थिति सदिश है।

समतल का सदिश समीकरण $\{\vec{r} - \vec{a}\}.\left\{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right\} = 0$

यहाँ

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{c} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = -4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}$$

$$\vec{c} - \vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$$

इसलिए $\{\vec{r} - (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})\}.\{(-4\hat{i} - 8\hat{j} + 8\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j})\} = 0$

समतल का अभीष्ट समीकरण है।

35.7 समतल के समीकरण का अन्तःखण्ड स्वरूप

मान लीजिए कि समतल के x, y और z अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों की लम्बाइयाँ क्रमशः a, b और c हैं।

दूसरे शब्दों में, समतल बिन्दुओं (a,0,0), (0,b,0) और (0,0,c) से होकर जाता है।

अतः

$$x_1 = a \qquad y_1 = 0 \qquad z_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \qquad y_2 = b \qquad z_2 = 0$$

$$x_3 = 0 \qquad y_3 = 0 \qquad z_3 = c$$

समीकरण (6) में रखने पर, समतल का समीकरण है:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

या $$bcx + acy + abz - abc = 0 \text{ (सरल करने पर)}$$

या $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{z} = 1 \qquad .....(7)$$

समीकरण (7) समतल के समीकरण का अन्तःखण्ड स्वरूप कहलाता है।

उदाहरण 35.4. बिन्दुओं (0, 2, 3), (2, 0, 3) और (2, 3, 0) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : (6) का प्रयोग करते हुए, समतल का समीकरण है:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-3 \\ 2-0 & 0-2 & 3-3 \\ 2-0 & 3-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0$$

या $$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

या $$x(6-0) - (y-2)(-6) + (z-3)(2+4) = 0$$

या $$6x + 6(y-2) + 6(z-3) = 0$$

या $$x + y - 2 + z - 3 = 0 \quad \text{या} \quad x + y + z = 5$$

उदाहरण 35.5. दिखाइये कि बिन्दुओं (2, 2, 0), (2, 0, 2) और (4, 3, 1) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $x = y + z$ है।

हल : बिन्दु (2, 2, 0) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है:

$$a(x-2) + b(y-2) + cz = 0 \qquad .....(i)$$

बिन्दु (2,0,2) में से होकर जाता है

$\therefore$ $$a(2-2) + b(0-2) + 2c = 0$$

या $$c = b \qquad .....(ii)$$

पुनः (i) बिन्दु (4,3,1) से होकर जाता है।

$\therefore$ $$a(4-2) + b(3-2) + c = 0$$

या $$2a + b + c = 0 \qquad ....(iii)$$

(ii) और (iii) से, हमें प्राप्त होता है :

$$2a + 2b = 0 \quad \text{या} \quad a = -b$$

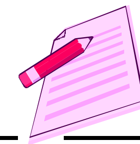
$\therefore$ (i) हो जाता है : $$-b(x-2) + b(y-2) + bz = 0$$

या $$-(x-2) + y - 2 + z = 0$$

या $$y + z - x = 0$$

या $$x = y + z$$

जो कि समतल का अभीष्ट समीकरण है।



उदाहरण 35.6. समतल के समीकरण $4x - 5y + 6z - 60 = 0$ को अन्त:खण्ड स्वरूप में व्यक्त कीजिए। इसके निर्देशांक अक्षों पर अन्त:खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : समतल का समीकरण है:

$$4x - 5y + 6z - 60 = 0 \quad \text{या} \quad 4x - 5y + 6z = 60 \qquad ....(i)$$

(i) को पुन: लिखपे पर $\frac{4x}{60} - \frac{5y}{60} + \frac{6z}{60} = 1$ या $\frac{x}{15} + \frac{y}{(-12)} + \frac{z}{10} = 1$

जो कि समतल का अन्त:खण्ड स्वरूप में अभीष्ट समीकरण है। साथ ही निर्देशांक अक्षों x, y और z पर क्रमश: अन्त: खण्ड $15, -12$ और 10 है।

उदाहरण 35.7. निम्न में से प्रत्येक समतल के समीकरण को अभिलम्ब स्वरूप में बदलिये :

(i) $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ (ii) $2x + 6y - 3z + 5 = 0$

दोनों अवस्थाओं में, मूलबिन्दु से समतलों पर लम्ब की लम्बाइयाँ भी ज्ञात कीजिये।

हल : (i) समतल की समीकरण है: $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ....(A)

(A) को $\sqrt{2^2 + (-3^2) + 4^2}$ या $\sqrt{29}$ से भाग देने पर

$$\frac{2x}{\sqrt{29}} - \frac{3y}{\sqrt{29}} + \frac{4z}{\sqrt{29}} - \frac{5}{\sqrt{29}} = 0$$

या
$$\frac{2x}{\sqrt{29}} - \frac{3y}{\sqrt{29}} + \frac{4z}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

जो कि समतल का अभिलम्ब स्वरूप में समीकरण है।

$\therefore$ मूलबिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई $\frac{5}{\sqrt{29}}$ है।

(ii) समतल का समीकरण है: $2x + 6y - 3z + 5 = 0$ .....(B)

(B) को $\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2}$ या -7 से भाग देने पर,

$$-\frac{2x}{7} - \frac{6y}{7} + \frac{3z}{7} - \frac{5}{7} = 0 \quad \text{या} \quad -\frac{2x}{7} - \frac{6y}{7} + \frac{3z}{7} = \frac{5}{7}$$

जो कि समतल का अभिलम्ब स्वरूप में समीकरण है।

मूलबिन्दु से समतल पर खींचे गये लम्ब की लम्बाई $\frac{5}{7}$ है।

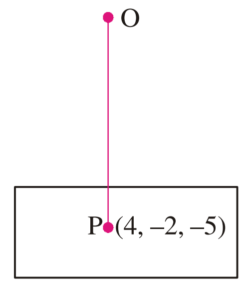
उदाहरण 35.8. मूलबिन्दु से किसी समतल पर खींचे गये लम्ब के पाद के निर्देशांक $(4,-2,-5)$ है। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

हल : माना मूलबिन्दु O से समतल पर खींचे गये लम्ब का पाद बिन्दु P है।

तब P के निर्देशांक $(4,-2,-5)$ हैं।

बिन्दु P $(4,-2,-5)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है :

$$a(x-4)+b(y+2)+c(z+5)=0 \qquad .....(i)$$



चित्र 35.5

अब OP समतल पर लम्ब है तथा OP की दिक्कोज्याएँ

निम्न के समानुपाती है :

$$4-0, -2-0, -5-0$$

या $$4, -2, -5$$

(i) में, a, b, c के स्थान पर 4,–2,–5 रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$4(x-4)-2(y+2)-5(z+5)=0$$

या $$4x-16-2y-4-5z-25=0$$

या $$4x-2y-5z=45$$

जो कि समतल का अभीष्ट समीकरण है।

देखें आपने कितना सीखा 35.1

1. समतल के निम्न समीकरणों को अभिलम्ब स्वरूप में बदलिये:

   (i) $4x+12y-6z-28=0$ (ii) $3y+4z+3=0$

2. मूलबिन्दु से एक समतल पर खींचे गए लम्ब का पाद बिन्दु $(1,-3,1)$ है। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. मूलबिन्दु से समतल पर खीचे गए लम्ब के पाद के निर्देशांक $(1,-2,1)$. हैं। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. निम्न बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए :

   (a) $(2,2,-1)$, $(3,4,2)$ और $(7,0,6)$

   (b) $(2,3,-3)$, $(1,1,-2)$ और $(-1,1,4)$

   (c) $(2,2,2)$, $(3,1,1)$ और $(6,-4,-6)$

5. दिखाइये कि बिन्दुओं $(3,3,1)$, $(-3,2-1)$ और $(8,6,3)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $4x+2y-13z=5$ है।

6. एक ऐसे समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्त:खण्ड क्रमश: 2, 3 तथा 4 हैं।

7. समतल $2x+3y+4z=24$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्त:खण्ड ज्ञात कीजिए।

8. दिखाइये कि बिन्दु $(-1,4,-3),(3,2,-5),(-3,8,-5)$ तथा $(-3,2,1)$ समतलीय हैं।

9. (i) समतल $x-4y+3z=7$ के अभिलंब के दिक्–कोसाइन क्या हैं?

   (ii) समतल $2x+3y-z=17$ की मूल बिन्दु से दूरी क्या है?

   (iii) समतल $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})=7$ तथा $\vec{r}.(3\hat{i}-12\hat{j}-5\hat{k})=6$, परस्पर .... हैं।

10. समतल के समीकरण $\vec{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})=1$ को कार्तीय रूप में परिवर्तित कीजिए।
11. बिन्दुओं (1, 1, 0), (1, 2, 1) तथा (–2, 2, –1) से होकर जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
12. बिन्दु (1, 4, 6) से होकर जाने वाले तथा सदिश $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के अभिलंब समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

35.8 दो समतलों के बीच का कोण

माना दो समतल p_1 और p_2 के समीकरण हैं:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad ....(i)$$

और $$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \qquad ....(ii)$$

माना दोनों समतल रेखा l में प्रतिच्छेद करते हैं। माना दोनों समतलों के बीच का कोण θ है।

$\therefore$ दोनों समतलों के अभिलम्बों की दिक्कोज्याएँ हैं :

$$\pm\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\quad \pm\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},\quad \pm\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

और $$\pm\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},\ \pm\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},\ \pm\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$\therefore$ $$\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

चिन्ह + या – का इस तरह चुनाव करना है कि $\cos\theta$ धनात्मक हो।

उपप्रमेय 1 : जब दो समतल परस्पर लम्ब हों, तो

$$\theta = 90^\circ, \text{ अर्थात् } \cos\theta = 0$$

दो समतलों $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ का एक दूसरे पर लम्ब होने के लिए प्रतिबन्ध है कि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ हो।

उपप्रमेय 2 : यदि दो समतल समान्तर हों, तो इन समतलों के अभिलम्ब भी समान्तर होगें।

$\therefore$ $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

दो समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ परस्पर समान्तर हों, के लिए प्रतिबन्ध है कि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो। इससे यह अर्थ निकलता है कि दो समान्तर समतलों के समीकरणों केवल एक अचर राशि ही होता है।

$\therefore$ समतल $ax + by + cz + d = 0$ के समान्तर समतल का समीकरण $ax + by + cz + k = 0$ है, जबकि k एक अचर राशि है।

उदाहरण 35.9. निम्न समतलों के बीच का कोण ज्ञात कीजिये :

$$3x + 2y - 6z + 7 = 0 \qquad \text{......(i)}$$

और $$2x + 3y + 2z - 5 = 0 \qquad \text{......(ii)}$$

हल : यहाँ पर, $a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = -6$

और $a_2 = 2, b_2 = 3, c_2 = 2$

यदि समतलों (i) और (ii) के बीच का कोण θ है, तो

$$\cos\theta = \frac{3.2 + 2.3 + (-6).2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2}\ \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = 0$$

$\therefore\ \theta = 90°$

इस प्रकार, समतल (i) और (ii) एक दूसरे पर लम्ब हैं।

उदाहरण 35.10 समतल $x - 3y + 4z - 1 = 0$ के समान्तर एक समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, यदि वह बिन्दु (3, 1, –2) से होकर जाता हो।

हल : माना समतल $x - 3y + 4z - 1 = 0$ के समान्तर समतल का समीकरण है :

$$x - 3y + 4z + k = 0 \qquad \text{..... (i)}$$

चूँकि (i) बिन्दु $(3, 1, -2)$ से होकर जाता है इसलिए

$\therefore \qquad 3 - 3(1) + 4(-2) + k = 0$

या $\qquad 3 - 3 - 8 + k = 0$ या $k = 8$

$\therefore$ समतल का अभीष्ट समीकरण $x - 3y + 4z + 8 = 0$ है।

उदाहरण 35.11. बिन्दुओं (–1, 2, 3) और (2, –3, 4) से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो समतल $3x + y - z + 5 = 0$ पर लम्ब है।

हल : बिन्दु (–1, 2, 3) से होकर जाने वाले किसी समतल का समीकरण है

$$a(x + 1) + b(y - 2) + c(z - 3) = 0 \qquad \text{.....(i)}$$

बिन्दु (2,–3, 4) समतल (i) में स्थित है।

$\therefore \qquad 3a - 5b + c = 0 \qquad$ ....(ii)

पुनः, समतल (i) समतल $3x + y - z + 5 = 0$ पर लम्ब है।

$\therefore \qquad 3a + b - c = 0 \qquad$ ....(iii)

(ii) और (iii) से वज्रगुणन विधि द्वारा,

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{18} \quad \text{या} \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{9}$$

अत: समतल का अभीष्ट समीकरण है :

$$2(x + 1) + 3(y - 2) + 9(z - 3) = 0 \quad \text{....[(i) से]}$$

या $$2x + 3y + 9z = 31$$

उदाहरण 35.12. बिन्दु $(2,-1,5)$ से होर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो समतलों $x+2y-z=1$ तथा $3x-4y+z=5$ में से प्रत्येक पर लम्ब हो :

हल : बिन्दु $(2,-1,5)$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण है

$$a(x-2)+b(y+1)+c(z-5)=0 \qquad .....(i)$$

यह समतल, समतलों $x + 2y - z = 1$ तथा $3x - 4y + z = 5$ पर लम्ब है।

$\therefore \qquad a.1 + b.2 + c.(-1) = 0$

तथा $\qquad a.3 + b.(-4) + c.(1) = 0$

या
$$a + 2b - c = 0 \qquad ....(ii)$$
$$3a - 4b + c = 0 \qquad ....(iii)$$

(ii) और (iii) से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{a}{2-4} = \frac{b}{-3-1} = \frac{c}{-4-6}$$

या $\qquad \dfrac{a}{-2} = \dfrac{b}{-4} = \dfrac{c}{-10}$

या $\qquad \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{5} = \lambda$ (माना)

$\therefore \qquad a = \lambda,\ b = 2\lambda$ और $c = 5\lambda$

a, b तथा c के मान (i) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\lambda(x-2)+2\lambda(y+1)+5\lambda(z-5)=0$$

या $\qquad x - 2 + 2y + 2 + 5z - 25 = 0$

या $\qquad x + 2y + 5z - 25 = 0$

जो कि समतल का अभीष्ट समीकरण है।

देखें आपने कितना सीखा 35.2

1. समतलों के बीच का कोण ज्ञात कीजिये :

   (i) $2x - y + z = 6$ और $x + y + 2z = 3$

   (ii) $3x - 2y + z + 17 = 0$ और $4x + 3y - 6z + 25 = 0$

2. सिद्ध कीजिये कि निम्न समतल एक दूसरे पर लम्ब हैं :

   (i) $x + 2y + 2z = 0$ और $2x + y - 2z = 0$

   (ii) $3x + 4y - 5z = 9$ और $2x + 6y + 6z = 7$

3. बिन्दु $(2, 3, -1)$ से होकर जाने वाले तथा समतल $2x+3y+6z+7=0$ के समान्तर समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

4. बिन्दुओं (–1,1,1) और (1,–1,1) से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो समतल $x+2y+2z=5$ पर लम्ब है।

5. मूलबिन्दु से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जो निम्न में प्रत्येक समतल पर लम्ब है: $x+2y+2z=0$ और $2x+y+2z=0$

35.9 एक समतल से एक बिन्दु की दूरी

माना समतल का अभिलम्ब स्वरूप में समीकरण है:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p\ ,\ \text{जबकि}\quad p>0 \qquad ....(i)$$

अवस्था I : माना बिन्दु P (x', y', z') समतल के उस ओर स्थित है जिस ओर मूलबिन्दु है।

समतल (i) के समान्तर बिन्दु P से होकर जाने वाला, समतल खींचिये।

इसका समीकरण है:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p' \qquad .....(ii)$$

जबकि p', मूलबिन्दु से समतल (ii) पर खींचे गए लम्ब की लम्बाई है।

P की समतल (i) से लाम्बिक दूरी = p–p'

क्योंकि समतल (ii) बिन्दु (x',y',z') से होकर जाता है, इसलिए

$$x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma = p'$$

∴ P की दिये गये समतल से दूरी

$$p - p' = p - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)$$

अवस्था II : यदि बिन्दु P समतल के उस ओर स्थित न हो जिस ओर मूल बिन्दु है (अर्थात् P और मूलबिन्दु समतल की विपरीत दिशाओं में हैं), तो

P की समतल (i) से दूरी

$$= p' - p = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p$$

टिप्पणी: यदि समतल का समीकरण $ax + by + cz + d = 0$, दिया गया हो, तो पहले हम इसे अभिलम्ब स्वरूप में बदल लेते हैं और फिर ऊपर दिया गया सूत्र प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 35.13. बिन्दु (1,2,3) की समतल $3x - 2y + 5z + 17 = 0$ से दूरी ज्ञात कीजिये।

हल : अभीष्ट दूरी $= \dfrac{3.1 - 2.2 + 5.3 + 17}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}} = \dfrac{31}{\sqrt{38}}$ इकाई

उदाहरण 35.14. समतलों

$$x - 2y + 3z - 6 = 0$$

तथा $$2x - 4y + 6z + 17 = 0$$

के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये।

हल : समतलों के समीकरण हैं :

$$x - 2y + 3z - 6 = 0 \qquad ....(i)$$

$$2x - 4y + 6z + 17 = 0 \qquad ....(ii)$$

यहाँ, $\frac{1}{2} = \frac{(-2)}{(-4)} = \frac{3}{6}$

$\therefore$ समतल (i) तथा (ii) समांतर हैं।

समतल (i) पर कोई बिन्दु है: (6,0,0)

$\therefore$ समतल (i) तथा (ii) के बीच की दूरी

$$= \text{बिन्दु } (6,0,0) \text{ से समतल (ii) की दूरी}$$

$$= \frac{2 \times 6 - 4.0 + 6.0 + 17}{\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{29}{\sqrt{56}} \text{ इकाई} = \frac{29}{2\sqrt{14}} \text{ इकाई}$$

देखें आपने कितना सीखा 35.3

1. दिये गये बिन्दु से समतल की दूरी ज्ञात कीजिए :

   (i) $(2, -3, 1)$, $5x - 2y + 3z + 11 = 0$

   (ii) $(3, 4, -5)$, $2x - 3y + 3z + 27 = 0$

2. समतलों $3x + y - z - 7 = 0$ तथा $6x + 2y - 2z + 11 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये।

आइये दोहराएँ

- समतल एक ऐसा पृष्ठ है कि यदि इसमें स्थित कोई दो बिन्दु लिये जाएँ, तो इनको मिलाने वाली पूरी रेखा इसमें स्थित होती है।
- $\vec{r}.\hat{n} = d$ समतल का सदिश समीकरण है जहाँ $\hat{n}$ समतल के अभिलंब मात्रक सदिश है और d समतल की मूल बिन्दु से दूरी है।
- इसका संगत कार्तीय रूप $lx + my + nz = d$ है, जहाँ l, m, n समतल के अभिलंब सदिश के दिक्-कोसाइन हैं और d समतल की मूल बिन्दु से दूरी है।
- $(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n} = 0$ समतल का एक अन्य सदिश समीकरण है जहाँ $\vec{a}$ समतल पर दिए हुए बिन्दु का स्थिति सदिश है और $\vec{n}$ समतल का अभिलंब सदिश है।
- इसका संगत कार्तीय रूप $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ हैं; जहाँ a, b, c समतल के अभिलंब सदिश के दिक्-अनुपात हैं और (x_1, y_1, z_1) समतल पर दिए हुए बिन्दु के निर्देशांक हैं।
- $(\vec{r} - \vec{a}).\{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\} = 0$ एक ऐसे समतल का समीकरण है जो तीन बिन्दुओं से होकर जाता है और उन तीन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं।

- इसका संगत कार्तीय समीकरण $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ है।

- समतल का व्यापक समीकरण है : $ax + by + cz + d = 0$

- समतल के समीकरण का अन्तःखण्ड स्वरूप है: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

  जबकि a, b और c समतल द्वारा क्रमशः x,y और z अक्षों पर अन्तःखण्ड हैं।

- दो समतलों $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ के बीच का कोण θ निम्न सम्बन्ध से ज्ञात होता है:

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- दो समतल एक दूसरे पर लम्ब हैं, यदि और केवल यदि

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

- दो समतल परस्पर समान्तर हैं, यदि और केवल यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो।

- समतल $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\nu$ से एक बिन्दु x', y', z' की दूरी $|p - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)|$ है, जबकि बिन्दु (x', y', z') समतल से मूलबिन्दु की ओर ही स्थित हो।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.mathopenref.com/plane.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Plane_(geometry)*
- *https://www.youtube.com/watch?v=jNZPcX4lK-8*

आइए अभ्यास करें

1. बिन्दु (–2, 5, 4) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।
2. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दुओं (2, 1, 4) और (2, 6, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के आन्तरिक अनुपात में विभाजित करता है।
3. बिन्दुओं (1,1,0),(1,2,1) और (–2,2,–1) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।
4. दिखाइये कि चार बिन्दु (0, –1, –1), (4, 5, 1), (3, 9, 4) और (–4, 4, 4) समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिये, जिसमें ये बिन्दु स्थित है।

5. बिन्दु (1, –2, –3) से एक समतल पर खींचे गए लम्ब का पाद बिन्दु (3, 2, –1) है। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
6. समतलों $x + y + 2z = 9$ और $2x - y + z = 15$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिये।
7. सिद्ध कीजिये कि समतल $3x - 5y + 8z - 2 = 0$ और $12x - 20y + 32z + 9 = 0$ समान्तर हैं।
8. k का वह मान ज्ञात कीजिये जिसके लिए समतल $3x - 2y + kz - 1 = 0$ और $x + ky + 5z + 2 = 0$ एक दूसरे पर लम्ब हों।
9. बिन्दु (3, 2, –5) की समतल $2x - 3y - 5z = 7$ से दूरी ज्ञात कीजिए।
10. बिन्दु (3, –1, 5) से होकर जाने वाले तथा (2, –3, 1) दिक्-अनुपातों वाली रेखा के लम्ब समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
11. एक ऐसे समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 इकाई की दूरी पर है तथा सदिश $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ के साथ लम्बवत् है।
12. बिन्दुओं A(–2, 6, –6), B(–3, 10, –9) तथा C(–5, 0, –6) से होकर जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 35.1

1. (i) $\frac{4x}{14} + \frac{12y}{14} - \frac{6z}{14} = 2$ (ii) $-\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z = \frac{3}{5}$

2. $x - 3y + z - 11 = 0$ 3. $x - 2y + z - 6 = 0$

4. (a) $5x + 2y - 3z - 17 = 0$ (b) $3x - y + z = 0$

(c) $x + 2y - z = 4$

6. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

7. x, y और z निर्देशांक अक्षों पर अन्तः खण्ड क्रमशः 12,8 और 6 हैं।

9. (i) $\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}$ (ii) $\frac{17}{\sqrt{14}}$ इकाई (iii) लम्ब

10. $2x + 3y - 4z = 1$ 11. $\vec{r}.(2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$

12. $\vec{r}.(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + 1 = 0$

देखें आपने कितना सीखा 35.2

1. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$

3. $2x + 3y + 6z = 7$

4. $2x + 2y - 3z + 3 = 0$

5. $2x - 2y + z = 0$

देखें आपने कितना सीखा 35.3

1. (i) $\frac{30}{\sqrt{38}}$ इकाई (ii) $\frac{6}{\sqrt{22}}$ इकाई

2. $\frac{25}{2\sqrt{11}}$ इकाई

आइए अभ्यास करें

1. $a(x+2) + b(y-5) + c(z-4) = 0$

2. $a(x-2) + b(y-3) + c(z-4) = 0$

3. $2x + 3y - 3z - 5 = 0$

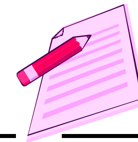
4. $5x - 7y + 11z + 4 = 0$ 5. $x + 2y + z = 6$

6. $\frac{\pi}{3}$ 8. $k = -1$ 9. $\frac{18}{\sqrt{38}}$

10. $\left\{\vec{r} - (-3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}\right\}.(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) = 0$

11. $\vec{r}.\left\{\frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right\} = 7$

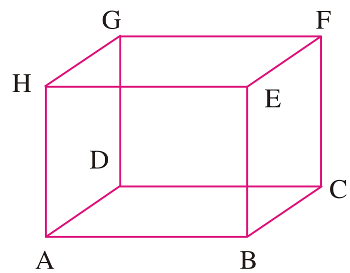
12. $\left\{\vec{r} - (-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}\right\}.\left\{(-\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) \times (-3\hat{i} - 6\hat{j}\right\} = 0$



36

सरल रेखा

चित्र 36.1 में,, एक आयताकार डिब्बा है जिसके छः पृष्ठ हैं। ये पृष्ठ छः तलों के भाग हैं। इस चित्र में, ABCD तथा EFGH समान्तर समतल हैं। इसी प्रकार, ADGH तथा BCFE समान्तर समतल हैं तथा ABEH तथा CFGD भी ऐसे ही समतल हैं। दो समतल ABCD तथा CFGD परस्पर रेखा CD पर काटते हैं। ऐसा ही किसी भी दो आसन्न समतलों में होता है। इस प्रकार, आप देखेंगे कि समतल परस्पर रेखाओं में मिलते हैं तथा किनारे शीर्ष बिन्दुओं पर मिलते हैं।



चित्र 36.1

इस पाठ में, हम अंतरिक्ष में रेखा का सममित रूप में समीकरण, रेखा के व्यापक समीकरण को सममित रूप में बदलना, एक बिन्दु की एक रेखा से लम्बिक दूरी तथा एक समतल और एक रेखा के बीच का कोण ज्ञात करने के बारे में पढ़ेंगे। दो रेखाओं के समतलीय होने के प्रतिबंध को भी स्थापित करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेगें :

- अंतरिक्ष में एक रेखा का सममित रूप में समीकरण ज्ञात करना
- एक रेखा के व्यापक समीकरण सममित रूप में बदलना
- एक बिन्दु की एक रेखा से लम्बिक दूरी ज्ञात करना
- एक रेखा तथा एक समतल के बीच का कोण ज्ञात करना
- दो रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबंध ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

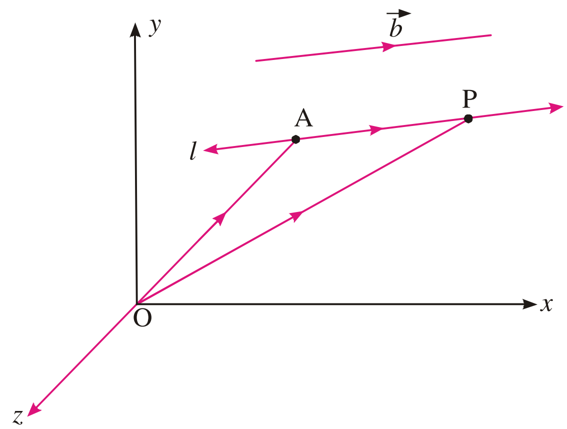
- एक रेखा की दिक्कोज्या/दिक-अनुपात तथा एक रेखाखण्ड का एक रेखा पर प्रक्षेप
- दो रेखाओं के परस्पर समान्तर तथा लम्ब होने का प्रतिबन्ध

36.1 रेखा का सदिश समीकरण

एक रेखा अद्वितियतः निर्धारित होती है, यदि यह एक दी गई दिशा में एक दिए हुए बिन्दु से होकर जाती है अथवा यह दो बिन्दुओं से होकर जाती है।

36.1.1 दिए गए बिन्दु से होकर जाने वाली तथा दिए गए सदिश के समान्तर रेखा का समीकरण : मान लीजिए कि दिए गए बिन्दु A से होकर जाने वाली तथा दिए

गए सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा l है। मान लीजिए बिन्दु A का स्थिति सदिश $\vec{a}$ और रेखा पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।



चित्र 36.2

ΔOAP में, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$

i.e. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{r}-\vec{a}$

परन्तु $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{b} \;\therefore\; \overrightarrow{AP}=\lambda\vec{b}$

$\therefore$ $\vec{r}-\vec{a} = \lambda\vec{b}$ ...(1)

$\Rightarrow$ $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ जो कि रेखा का सदिश रूप में अभीष्ट समीकरण है।

36.1.2 सदिश रूप को कार्तीय रूप में परिवर्तित करना

मान लीजिए, (x_1, y_1, z_1), दिए हुए बिन्दु A के निर्देशांक हैं तथा b_1, b_2, b_3 सदिश $\vec{b}$ के दिक्–अनुपात हैं। इसके अतिरिक्त बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

तब $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k},\ \vec{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$

और $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}.$

इन मानों को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$(x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k} = \lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_1}{b_1}=\lambda, \frac{y-y_1}{b_2}=\lambda, \frac{z-z_1}{b_3}=\lambda$$

$\therefore$ $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$, जो कि रेखा के समीकरण का संगत कार्तीय रूप है।

यह रेखा के समीकरण का सममित रूप है।

36.1.3 दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

मान लीजिए बिन्दु A तथा B से होकर जाने वाली रेखा l है। मान लीजिए बिन्दुओं A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं।

इसके अतिरिक्त रेखा पर किसी स्वेच्छ बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

आकृति में,

$$\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$$

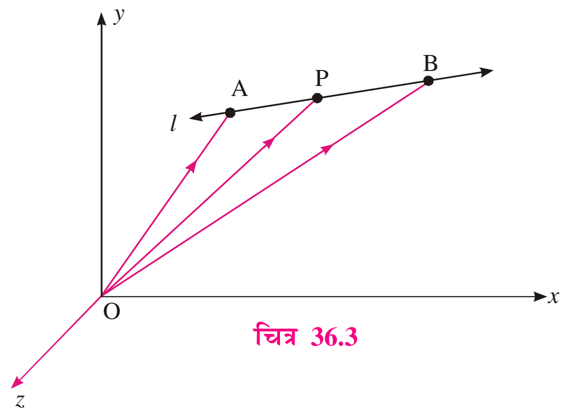
और $$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

परन्तु $\overrightarrow{AP}$ तथा $\overrightarrow{AB}$ संरेख सदिश हैं

$$\therefore \quad \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

i.e. $$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \qquad ...(2)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$



चित्र 36.3

जो कि सदिश रूप में रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

36.1.4 सदिश रूप को कार्तीय रूप में परिवर्तित करना

मान लीजिए (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) क्रमशः बिन्दु A तथा B के निर्देशांक हैं। बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

तब $$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}, \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

और $$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

इन मानों को समीकरण (2) में रखने पर,

$$(x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k} = \lambda(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda, \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda, \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

$\therefore \quad \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$, रेखा के समीकरण का संगत कार्तीय रूप है।

यह रेखा के समीकरण का द्वि–बिन्दु प्रारूप है।

उदाहरण 36.1. बिन्दु (2, –3, 5) से होकर जाने वाली तथा सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

जो कि रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 36.2. बिन्दुओं (–1, 5, 2) तथा (4, 3, –5) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दो बिन्दु रूप में रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \text{ है।}$$

यहाँ $\vec{a} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$

तथा $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{b} - \vec{a} = 5\hat{i} - 2\hat{j} - 7\hat{k}$

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण है : $\vec{r} = (-\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}) + \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} - 7\hat{k})$

उदाहरण 36.3. रेखा के समीकरण $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-5}{7}$ को सदिश रूप में लिखिए।

हल : दिए हुए समीकरण की समीकरण $\dfrac{x-x_1}{b_1} = \dfrac{y-y_1}{b_2} = \dfrac{z-z_1}{b_3}$ से तुलना करने पर,

$$x_1 = -3,\ y_1 = 2,\ z_1 = 5$$
$$b_1 = 2,\ b_2 = -3,\ b_3 = 7$$

$\therefore$ $\vec{a} = (-3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$

और $\vec{b} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$

अतः $\vec{r} = (-3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$ सदिश रूप में अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 36.4. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2,–3) से होकर जाती है तथा जिसके दिक्कोज्याएँ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ हैं।

हल : रेखा के समीकरण हैं :

$$\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{y-2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{z+3}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

अर्थात् $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{-1}$

अर्थात् $x - 1 = y - 2 = -(z+3)$

उदाहरण 36.5. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1,–3, 2) से होकर जाती है तथा जिसके दिक्-अनुपात (1,–2, 3) हैं।

हल : रेखा के समीकरण है :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{3}$$

उदाहरण 36.6. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए जो दो बिन्दुओं (1,–3,2) तथा (4,2,–3) से होकर जाती है।

हल : वांछित रेखा के समीकरण है :

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y+3}{2+3}=\frac{z-2}{-3-2}$$

अर्थात्
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-2}{-5}$$

उदाहरण 36.7. बिन्दुओं (0,2,3) तथा (–1,3,7) को मिलाने वाली रेखा के समांतर तथा बिन्दु (1,–5,–6) से होकर जाने वाली रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिये।

हल : बिन्दुओं (0,2,3) तथा (–1,3,7) को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात हैं:

$$-1-0,\ 3-2,\ 7-3$$

या
$$-1, 1, 4$$

अतः, इस रेखा के समांतर रेखा के दिक्-अनुपात भी –1, 1,4 लिये जा सकते हैं।

अतः, दी गई रेखा के समान्तर तथा (1,–5,–6) से होकर जाने वाली रेखा के समीकरण हैं :

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z+6}{4}$$

देखें आपने कितना सीखा 36.1

1. एक रेखा के सममित रूप में समीकरण लिखिये, जो बिन्दु (1,–2,3) से होकर जाती है तथा जिसके दिक्-अनुपात 3,–4,5 हैं।
2. बिन्दु (3,–9,4) तथा (–9,5,–4) से होकर जाने वाली रेखा के सममित रूप में समीकरण लिखिये।
3. सममित रूप में समीकरण लिखिये, जो बिन्दुओं (–7,5,3) तथा (2, 6,8) से होकर जाती है।
4. रेखा के सममित रूप में समीकरण लिखिये, जो बिन्दु (1,2,3) से होकर जाती है तथा बिन्दुओं (–4,7,2) और (5,–3,–2) से होकर जाने वाली रेखा के समान्तर है।
5. उस रेखा के सममित रूप में समीकरण लिखिये, जो मूलबिन्दु से गुज़रती है तथा निर्देशांक अक्षों पर समान रूप में झुकी हुई है।
6. मूल बिन्दु एवं बिन्दु (5, –2, 3) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण लिखिए।
7. रेखा के समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-3}{2}$ को सदिश रूप में लिखिए।
8. रेखा के समीकरण $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ को कार्तीय रूप में लिखिए।
9. बिन्दु (2, –1, 4) से होकर जाने वाली तथा सदिश $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

36.2 एक रेखा के समीकरणों को सममित रूप में परिवर्तित करना

आपको ध्यान होगा कि दो असमान्तर समतलों का प्रतिच्छेदन एक रेखा होती है।

माना दो प्रतिच्छेदीत समतलों के समीकरण

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{...(i)}$$

तथा $\quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$ हैं। ....(ii)

माना ये दोनो समतल रेखा AB पर प्रतिच्छेदित करते हैं। AB का प्रत्येक बिन्दु दोनों तलों पर है। अतः, रेखा के प्रत्येक बिन्दु के निर्देशांक दोनों समतलों के समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं। अतः समीकरण (i) तथा (ii) दोनों एक रेखा के समीकरण हैं।

समीकरण $ax + by + cz = 0$ तथा $a'x + b'y + c'z = 0$ ऐसी रेखा के समीकरण हैं जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा उपरोक्त रेखा के समान्तर है, क्योंकि उपरोक्त दोनों समतल शून्य से होकर जाते हैं। उपरोक्त रूप में समीकरणों को रेखा के व्यापक रूप (अथवा असममित रूप) में समीकरण कहते हैं।

(i) तथा (ii) के रूप में दिये गये रेखा के समीकरणों को सममित रूप में परिवर्तित करने के लिए, हमें रेखा की दिक्कोज्याएँ तथा रेखा पर स्थित एक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात होने चाहिए।

माना रेखा की दिक्कोज्याएँ l, m तथा n हैं। समीकरण (i) तथा (ii) द्वारा प्रदर्शित समतलों के अभिलम्बों पर यह रेखा लम्ब है।

$\therefore \qquad al + bm + cn = 0 \qquad$ और $\qquad a'l + b'm + c'n = 0$

वज्रगुणन विधि द्वारा हम पाते हैं :

$$\frac{l}{bc' - b'c} = \frac{m}{ca' - ac'} = \frac{n}{ab' - a'b}$$

अतः, रेखा की दिक्कोज्याएँ $(bc' - b'c), (ca' - ac')$ और $(ab' - a'b)$ के समानुपाती हैं।

समीकरणों (i) तथा (ii) में, $z = 0$ रखने पर, हमें वह बिन्दु मिलता है जिस पर xy-रेखा समतल से मिलती है। इससे हमें प्राप्त होता है :

$$ax + by + d = 0 \qquad \text{....(iii)}$$

$$a'x + b'y + d' = 0 \qquad \text{....(iv)}$$

(iii) तथा (iv) को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x = \frac{bd' - b'd}{ab' - a'b}, \; y = \frac{da' - d'a}{ab' - a'b}$$

अतः, रेखा का एक बिन्दु $\left(\dfrac{bd' - b'd}{ab' - a'b}, \dfrac{da' - d'a}{ab' - a'b}, 0\right)$ है।

अतः, सममित रूप में रेखा के समीकरण हैं :

$$\frac{x - \dfrac{bd' - b'd}{ab' - a'b}}{bc' - b'c} = \frac{y - \dfrac{da' - d'a}{ab' - a'b}}{ca' - c'a} = \frac{z}{ab' - a'b}$$

टिप्पणी: $z = 0$ को लेने के स्थान पर हम $x = 0$ या $y = 0$ या x, y, z के लिए कोई उचित मान ले सकते हैं, यदि इस प्रकार प्राप्त दोनों समीकरणों का एक अद्वितीय हल हो।

उदाहरण 36.8. किसी रेखा के समीकरणों $x - 2y + 3z = 4$ तथा $2x - 3y + 4z = 5$ को सममित रूप में परिवर्तित कीजिए तथा उसकी दिककोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना प्रत्येक तल पर किसी बिन्दु के z– निर्देशांक $z = 0$ हैं।

अत: समतलों के परिवर्तित समीकरण है :

$$x - 2y = 4$$

$$2x - 3y = 5$$

हल करने पर, $x = -2$ तथा $y = -3$ आता है।

$\therefore$ दोनों समतलों का उभयनिष्ट बिन्दु $(-2,-3,0)$ है। माना l, m, n रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं। क्योंकि यह रेखा समतल के अभिलम्ब पर लम्ब है, इसलिए

$$l - 2m + 3n = 0 \quad \text{तथा} \quad 2l - 3m + 4n = 0$$

$$\therefore \quad \frac{l}{-8+9} = \frac{m}{6-4} = \frac{n}{-3+4}$$

अर्थात् $$\frac{l}{1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{1} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

अत:, रेखा के सममित रूप में समीकरण है :

$$\frac{x+2}{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{y+3}{\pm\frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{z}{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

अर्थात् $$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$$

तथा रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं :

$$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$ (+ अथवा – का समान चिन्ह लेना है)

देखें आपने कितना सीखा 36.2

1. निम्न रेखाओं के समीकरणों को सममित रूप में लिखिए:

(i) $x + 5y - z = 7$ तथा $2x - 5y + 3z = -1$

(ii) $x + y + z + 1 = 0$ तथा $4x + y - 2z + 2 = 0$

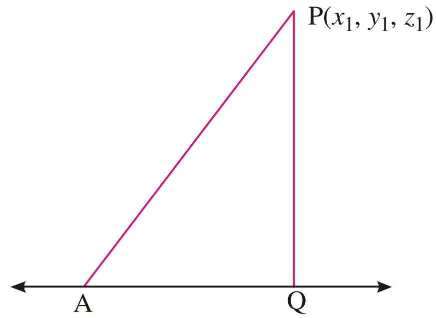
(iii) $x - y + z + 5 = 0$ तथा $x - 2y - z + 2 = 0$

36.3 एक बिन्दु की एक रेखा से लम्बिक दूरी

माना $P(x_1, y_1, z_1)$ एक बिन्दु है तथा AQ दी गई रेखा है, जिसके समीकरण

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

है, जबकि रेखा AQ की दिक्कोज्याएँ l, m और n हैं। बिन्दु P से रेखा AQ पर लम्ब का पाद Q है तथा A कोई बिन्दु (α, β, γ) है।



चित्र 36.4

$\therefore \quad PQ^2 = AP^2 - AQ^2$

अब, $\quad AP^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2$

AQ रेखा पर AP का प्रक्षेप

$$= (x_1 - \alpha)l + (y_1 - \beta)m + (z_1 - \gamma)n$$

$$\therefore \quad PQ^2 = \left\{(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2\right\}$$

$$- \{(x_1 - \alpha)l + (y_1 - \beta)m + (z_1 - \gamma)n\}^2$$

जो बिन्दु P से रेखा पर लम्ब PQ की दूरी दर्शाता है।

उदाहरण 36.9. बिन्दु $(2,3,1)$ की रेखा

$$y + z - 1 = 0 = 2x - 3y - 2z + 4 \text{ से दूरी ज्ञात कीजिए।}$$

हल : माना $z = 0$ दोनों समतलों के उभयनिष्ठ बिन्दु का z निर्देशांक है।

$\therefore$ अत:, समीकरण $y=1$ तथा $2x - 3y + 4 = 0$ बन जाते हैं जिनसे $x = -\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

$\therefore$ दोनों समतलों का उभयनिष्ठ बिन्दु $\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ है।

माना l, m, n रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं।

$0l + m + n = 0$ तथा $2l - 3m - 2n = 0$

या $\quad \frac{l}{1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{-2} = \frac{1}{\pm 3}$

या $\quad l = \pm\frac{1}{3},\ m = \pm\frac{2}{3},\ n = \mp\frac{2}{3}$

यदि बिन्दु $(2,3,1)$ से रेखा पर लम्ब की लम्बाई PQ हो, तो

$$PQ^2 = \left[\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + (3-1)^2 + (1-0)^2\right] - \left[\frac{5}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\times 2 - 1\times\frac{2}{3}\right]^2$$

$$= \left(\frac{25}{4} + 4 + 1\right) - \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{45}{4} - \frac{9}{4} = 9$$

$\therefore \ PQ = 3$

अर्थात् वांछित लाम्बिक दूरी 3 इकाई है।

देखें आपने कितना सीखा 36.3

1. निम्न में से प्रत्येक के लिए, एक बिन्दु की दी गई रेखा से दूरी ज्ञात कीजिए :

   (i) बिन्दु (0, 2, 3), रेखा $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{3}$

(ii) बिन्दु $(-1, 3, 9)$, रेखा $\dfrac{x-13}{5} = \dfrac{y+8}{-6} = \dfrac{z-31}{1}$

(iii) बिन्दु $(4, 1, 1)$, रेखा $x + y + z = 4,\ x - 2y - z = 4$

(iv) बिन्दु $(3, 2, 1)$, रेखा $x + y + z = 4$ तथा $x - 2y - z = 4$

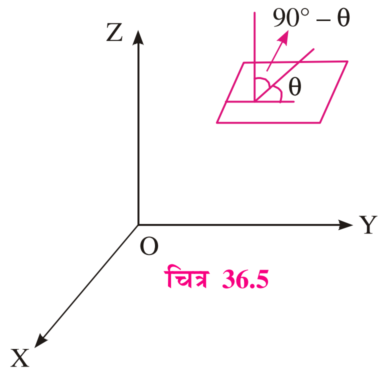
36.4 एक रेखा तथा एक समतल के बीच का कोण

एक रेखा तथा एक समतल के बीच का कोण समतल के अभिलम्ब तथा रेखा के बीच के कोण का पूरक होता है। माना रेखा के समीकरण

$$\frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n} \qquad .....(i)$$

हैं तथा समतल का समीकरण है :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad ....(ii)$$



चित्र 36.5

यदि (i) तथा (ii) के बीच का कोण θ है, तो

$$\sin\theta = \cos(90° - \theta)$$

$$= \frac{al + bm + cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

उदाहरण 36.10. रेखा $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ तथा समतल $2x - 3y + 4z - 7 = 0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिये।

हल : मान लीजिए कि समतल तथा रेखा के बीच का कोण θ है।

$$\sin\theta = \frac{2\times 3 - 3\times 3 + 4\times 1}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}\ \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{19}\ \sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{551}}$$

अर्थात् $$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{551}}\right)$$

देखें आपने कितना सीखा 36.4

1. निम्न रेखाओं तथा समतलों के बीच के कोण ज्ञात कीजिए :

(i) रेखा : $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$ तथा समतल : $3x - 4y + 5z = 5$

(ii) रेखा : $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{z-3}{3} = \dfrac{y+2}{1}$ तथा समतल : $-2x + 4y - 5z = 20$

(iii) रेखा : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{y+2}{5}$ तथा समतल : $x - 4y + 6z = 11$

(iv) रेखा : $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+4}{1}$ तथा समतल : $4x - 3y - z - 7 = 0$

36.5 दो रेखाओं के समतलीय होने का प्रतिबंध

यदि दो रेखायें

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad \text{......(i)}$$

तथा

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad \text{.....(ii)}$$

प्रतिच्छेद करती हैं तो ये एक ही समतल में होती हैं।

रेखा (i) जिस समतल में है, उस समतल का समीकरण है :

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad \text{......(iii)}$$

जबकि

$$Al_1+Bm_1+Cn_1=0 \qquad \text{.....(iv)}$$

यदि रेखा (ii) तल (iii) में है, तो बिन्दु (x_2, y_2, z_2) उस समतल पर स्थित होना चाहिए।

$$\therefore \quad A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0 \qquad \text{.....(v)}$$

जबकि

$$Al_2+Bm_2+Cn_2=0 \qquad \text{....(vi)}$$

(iv), (v) , (vi) में से A, B और C का विलोपन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{.....(vii)}$$ मिलता है।

यही रेखाओं (i) तथा (ii) के समतलीय होने का एक आवश्यक प्रतिबंध है।

पुनः (iii), (iv) , (vi) में से A, B और C का विलोपन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{.....(viii)}$$

(viii) दो परस्पर प्रतिच्छेदी रेखाओं को अंतर्निहित करने वाले समतल को दर्शाता है। अब हम सिद्ध करेंगे कि यदि प्रतिबंध (vii) सत्य है तो रेखाएं (i) तथा (ii) समतलीय हैं।

समतल

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{....(ix)}$$

पर विचार कीजिए।

अर्थात्

$$(x-x_1)(m_1n_2-m_2n_1)+(y-y_1)(n_1l_2-n_2l_1)$$
$$+(z-z_1)(l_1m_2-l_2m_1)=0$$

कोई रेखा समतल में स्थित होगी यदि समतल का अभिलंब उस रेखा पर लम्ब है तथा रेखा पर स्थित कोई भी बिन्दु समतल पर है। आप देख सकते हैं कि

$$l_1(m_1n_2 - m_2n_1) + m_1(n_1l_2 - n_2l_1) + n_1(l_1m_2 - l_2m_1) = 0$$

अत: रेखा (i) समतल (ix) पर स्थित है।

इसी प्रकार, हम देखते हैं कि रेखा (ii) समतल (ix) पर स्थित है, अत: दोनों रेखाएँ समतलीय हैं। अत:, प्रतिबंध (vii) दो रेखाओं के समतलीय होने के लिए प्रर्याप्त है।

उपप्रमेय : रेखायें (i) तथा (ii) परस्पर प्रतिच्छेद करेंगी, यदि तथा केवल यदि (vii) सत्य हैं तथा रेखायें समान्तर नहीं हैं।

टिप्पणी: (i) अंतरिक्ष में दो रेखायें जो कि न तो समान्तर हैं तथा न ही प्रतिच्छेदी हैं एक ही समतल में नहीं होती। ऐसी रेखाओं को विषमतलीय रेखायें कहते हैं।

(ii) यदि एक रेखा सममित रूप में तथा दूसरी व्यापक रूप में हों, तो निम्न प्रकार से आगे बढ़ते हैं।

माना एक रेखा

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad \text{.... (i)}$$

तथा दूसरी रेखा $ax + by + cz + d = 0$ तथा $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ है। .....(ii)

यदि दोनों रेखायें समतलीय हैं तब प्रथम रेखा का एक बिन्दु दूसरी रेखा के समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

रेखा (i) पर स्थित एक व्यापक बिन्दु $(x_1 + lr, y_1 + mr, z_1 + nr)$ है।

यह बिन्दु $ax + by + cz + d = 0$ पर भी स्थित है, यदि

$$a(x_1 + lr) + b(y_1 + mr) + c(z_1 + nr) + d = 0 \text{ हो।}$$

$$\therefore \quad r = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{al + bm + cn}$$

इसी प्रकार, यह बिन्दु $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ पर भी स्थित है।

$$\therefore \quad r = -\frac{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d'}{a'l + b'm + c'n}$$

के मान बराबर करने पर, हम निम्न वाँछित प्रतिबंध प्राप्त करते हैं :

$$\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{al + bm + cn} = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d'}{a'l + b'm + c'n}$$

टिप्पणी: यदि दोनों रेखायें व्यापक रूप में हैं, तो एक रेखा के समीकरण को सममित रूप में बदलिये तथा उपरोक्त विधि से ही प्रतिबंध ज्ञात कीजिये।

उदाहरण 36.11. सिद्ध कीजिए कि रेखायें

$$\frac{x - 5}{4} = \frac{y - 7}{4} = \frac{z + 3}{-5} \text{ तथा } \frac{x - 8}{7} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 5}{3} \text{ समतलीय हैं।}$$

हल : रेखाएँ $\frac{x - 5}{4} = \frac{y - 7}{4} = \frac{z + 3}{-5}$ ......(i)

तथा $\frac{x - 8}{7} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 5}{3}$ .... (ii)

समतलीय होंगी यदि

$$\begin{vmatrix} 8-5 & 4-7 & 5+3 \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{अर्थात्} \quad \begin{vmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ हो।}$$

या $\quad 3(12+5)+3(12+35)+8(4-28)=0$

या $\quad 51+141-192=0$

या $\quad 0=0$, जो कि सत्य है।

अत:, रेखायें (i) तथा (ii) समतलीय हैं।

उदाहरण 36.12. सिद्ध कीजिये कि रेखाएँ

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-6}{7}$$

समतलीय हैं। साथ ही उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिये जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं।

हल : रेखाएँ

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-6}{7}$$

समतलीय होंगी, यदि

$$\begin{vmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{अर्थात्} \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ हो।}$$

या $\quad 3(35-28)-7(21-7)+11(12-5)=0$

या $\quad 21-98+77=0$

या $\quad 0=0$. जो कि सत्य है।

$\therefore$ दी गई रेखाएँ समांतर हैं।

उस समतल का समीकरण, जिनमें ये रेखाएँ स्थित हैं, निम्न है :

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z+5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

या $\quad (x+1)(35-28)-(y+3)(21-7)+(z+5)(12-5)=0$

या $\quad 7x+7-14y-42+7z+35=0$

या $\quad 7x-14y+7z=0$

या $\quad x-2y+z=0$

देखें आपने कितना सीखा 36.5

1. सिद्ध कीजिये कि निम्न रेखायें समतलीय हैं :

   (i) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$ तथा $x+2y+3z=0=2x+4y+3z+3$

   (ii) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ तथा $4x-3y+1=0=5x-3z+2$

2. दिखाइये कि रेखाएँ $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+2}{1}$ तथा $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-7}{-3}=\dfrac{z+7}{2}$ समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये, जिनमें ये रेखाएँ स्थित हैं।

आइये दोहराएँ

- दो असमान्तर समतलों का प्रतिच्छेदन एक रेखा होता है।
- रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ है, जहाँ $\vec{a}$ रेखा पर दिए हुए बिन्दु का स्थिति सदिश और $\vec{b}$ रेखा के समान्तर एक सदिश है।
- इसका संगत कार्तीय रूप $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ है; जहाँ (x_1, y_1, z_1) रेखा पर दिए हुए बिन्दु के निर्देशांक हैं और b_1, b_2, b_3 सदिश $\vec{b}$ के दिक्–अनुपात हैं।
- $\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$ रेखा का एक अन्य सदिश समीकरण है जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ रेखा पर दो विभिन्न बिन्दुओं के स्थिति सदिश हैं।
- इसका संगत कार्तीय रूप $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ है; जहाँ (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) रेखा पर दिए हुए दो विभिन्न बिन्दुओं के निर्देशांक हैं।
- रेखा $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ तथा समतल $ax+by+cz+d=0$ के बीच का कोण θ

  $$\sin\theta=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ द्वारा प्राप्त होता है।

- दो रेखाएँ $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ तथा $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ समतलीय होंगी, यदि

  $$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ हो।}$$

तथा उस समतल का समीकरण, जिसमें ये दोनों रेखाएँ स्थित हैं, निम्न है :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

सहायक वेबसाइट

- *http://www.regentsprep.org/regents/math/algebra/ac1/eqlines.htm*
- *http://www.purplemath.com/modules/strtlneq.htm*
- *http://www.mathsteacher.com.au/year10/ch03_linear_graphs/02_gradient/line.htm*

आइए अभ्यास करें

1. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु (1,4,7) तथा (3,–2,5) से होकर जाती है।
2. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु (–1,–2,–3) से होकर जाती है तथा समतल $3x-4y+5z-11=0$ पर लम्ब है।
3. उस रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिये, जो उन रेखाओं पर लम्ब है जिनके दिक्–अनुपात $1,-1,2$, तथा $2,1,-1$ हैं।
4. दिखाइए कि बिन्दुओं (1,2,3) तथा (4,5,7) को मिलाने वाला रेखाखण्ड बिन्दुओं (–4,3,–6) तथा (2,9,2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के समान्तर है।
5. दो रेखाओं $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+5}{5}$ तथा $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
6. उस रेखा के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (1,2,–4) से होकर जाती है तथा निम्न दोनों रेखाओं में से प्रत्येक पर लम्ब है:
$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$$
7. रेखा $x-y+2z-5=0$ तथा $3x+y+z-6=0$ के समीकरणों को सममित रूप में परिवर्तित कीजिए।
8. दिखाइये कि रेखाएँ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{-1}$ तथा $\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं।
9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जिनमें निम्न रेखाएँ स्थित हैं:
$$\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3}$$
10. बिन्दुओं (2,3,1) तथा (5,8,7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का रेखा $\frac{x}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{6}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

11. बिन्दु (1, 2, –4) से होकर जाने वाली तथा सदिश $(2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

12. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x+5}{3}=\frac{y-4}{-5}=z$ है। इसका सदिश समीकरण क्या होगा?

13. बिन्दुओं (3, –2, –5) तथा (3, –2, 6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

14. बिन्दु (–2, 4, –5) से होकर जाने वाली तथा रेखा $\frac{x-3}{3}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-8}{2}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 36.1

1. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{5}$

2. $\frac{x-3}{-6}=\frac{y+9}{7}=\frac{z-4}{-4}$

3. $\frac{x+7}{9}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-3}{5}$

4. $\frac{x-1}{9}=\frac{y-2}{-10}=\frac{z-3}{-4}$

5. $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

6. $\vec{r}=\lambda(5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$

7. $\vec{r}=5\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k})$

8. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{2}$

9. $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

देखें आपने कितना सीखा 36.2

1. (i) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-3}$ (ii) $\frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-2}=\frac{z}{1}$

(iii) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{1}$

देखें आपने कितना सीखा 36.3

1. (i) $\sqrt{21}$ इकाई (ii) 21 इकाई

(iii) $\sqrt{\frac{27}{14}}$ इकाई (iv) $\sqrt{6}$ इकाई

देखें आपने कितना सीखा 36.4

1. (i) $\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{70}}\right)$

(iii) $\sin^{-1}\left(\frac{46}{\sqrt{2650}}\right)$ (iv) $0°$

देखें आपने कितना सीखा 36.5

2. $x + y + z = 0$

आइए अभ्यास करें

1. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z-7}{-2}$

2. $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z+3}{5}$

3. $-\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{5}{\sqrt{35}}, \dfrac{3}{\sqrt{35}}$

5. $90°$

6. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+4}{6}$

7. $\dfrac{x-\frac{11}{4}}{-3} = \dfrac{y+\frac{9}{4}}{5} = \dfrac{z}{4}$

8. $2x - 5y - 16z + 13 = 0$

9. $17x - 47y - 24z + 172 = 0$

10. $\dfrac{57}{7}$ इकाई

11. $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$

12. $\vec{r} = (-5\hat{i} + 4\hat{j}) + \lambda(3\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k})$

13. $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}) + \lambda(11\hat{k})$

14. $\vec{r} = (-2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k})$

37

रैखिक प्रोग्रामन

37.1 रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का परिचय

एक खिलौना विक्रेता 1500 रुपये लेकर खिलौने खरीदने के लिए बाजार जाता है। बाजार में विभिन्न प्रकार के खिलौने उपलब्ध हैं। विशेषता के आधार पर, वह A तथा B प्रकार के खिलौनों को अनुरूप पाता है। A प्रकार के प्रत्येक खिलौनें का क्रय मूल्य 300 रुपये तथा B प्रकार के प्रत्येक खिलौने का क्रयमूल्य 250 रुपये है। वह A प्रकार के प्रत्येक खिलौने को 325 रुपये में तथा B प्रकार के प्रत्येक खिलौने को 265 रुपये में बेच सकता है। अपने पास उपलब्ध धन से वह अधिकतम लाभ प्राप्त करना चाहता है। उसकी समस्या यह है कि वह A तथा B प्रकार के कितने–कितने खिलौने खरीदे ताकि उन्हें बेचने पर उसे अधिकतम लाभ प्राप्त हो।

वह लागत की सीमा को ध्यान में रखकर A तथ B प्रकार के खिलौनों के सभी सम्भव क्रमचयों (combinations) के लिए निम्नलिखित तालिका बना सकता है।

'A' प्रकार	'B' प्रकार	लागत (रु. में)	बेचने के बाद राशि (रु. में) (बिना प्रयुक्त राशि यदि हो)	लागत पर लाभ (रु. में)
0	6	1500.00	1590.00	90.00
1	4	1300.00	1385.00	85.00
2	3	1350.00	1445.00	95.00
3	2	1400.00	1505.00	105.00
4	1	1450.00	1565.00	115.00
5	0	1500.00	1625.00	125.00

अब, अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए निर्णय स्पष्ट है। A प्रकार के पाँच खिलौने खरीदे जाने चाहिए। उपयुक्त समस्या का हल आसान था क्योंकि चयन केवल दो किस्मों तक सीमित था तथा खरीदी गई वस्तुओं की संख्या भी कम थी। यहाँ, सभी सम्भव क्रमचयों के बारे में सोचा गया तथा उनसे संबन्धित लाभ की गणना की गई। लेकिन यह निश्चित करना होगा कि उसने सभी संभावनाओं को ध्यान में रखा है।

ऊपर वर्णित समस्या के समान एक रेडियो फुटकर विक्रेता द्वारा एक समस्या का सामना किया गया। इस का वर्णन नीचे दिया गया है।

एक रेडियो फुटकर विक्रेता एक थोक विक्रेता से रेडियो ट्रांजिस्टर खरीदना चाहता है। दो प्रकार (A तथा B प्रकार) के रेडियो हैं। A प्रकार के प्रत्येक रेडियो का क्रय मूल्य 360 रुपये तथा *B* प्रकार के प्रत्येक रेडियो का क्रय मूल्य 240 रु. है। विक्रेता 5760 रु. तक खर्च कर सकता है। वह A प्रकार के प्रत्येक रेडियो को बेचेने पर 50 रुपये लाभ तथा B प्रकार के प्रत्येक रेडियो को बेचने पर 40 रुपये लाभ प्राप्त कर सकता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए उसे प्रत्येक प्रकार के कितने रेडियो खरीदने चाहिएँ?

यहाँ हम लाभ को अधिकतम करते हैं। कुछ समस्याओं में कीमत को न्यूनतम करते हैं। निम्नलिखित समस्या को लीजिए।

दो दर्जी A तथा B प्रत्येक दिन क्रमशः 150 रुपये तथा 200 रुपये कमाते हैं। दर्जी A प्रतिदिन 6 कमीज, 4 पैंट तथा दर्जी B प्रतिदिन 4 कमीज तथा 7 पैंट की सिलाई करता है। यदि वे न्यूनतम श्रमिक मूल्य पर कम–से–कम 60 कमीज तथा 72 पैंट बनाना चाहें तो प्रत्येक को कितने दिन कार्य करना होगा।

इस समस्या में हमें श्रमिक मूल्य को न्यूनतम करना है।

अधिकतम तथा न्यूनतम करने की इस प्रकार की समस्याओं को इष्टतम समस्या (Optimization Problems) कहते हैं।

इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए गणितज्ञों द्वारा अपनाई गई विधि को रैखिक–प्रोग्रामन (Linear Programming) कहते हैं।

37.1.1 ऐतिहासिक आधार

रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming) विधि हल की नवीन उत्पत्ति है। यह द्वितीय विश्व युद्ध के दौरान शुरू हुई जब युद्ध क्रियाओं के खर्चे को कम करने, हानि को न्यूनतम करने तथा शत्रु के नुकसान को अधिकतम करने के लिए योजनाबद्ध करना पड़ा।

1941 में रूस के गणितज्ञ एल. कन्टोरोविच तथा अमेरिका के अर्थशास्त्री एफ.एल. हिल्कोक ने रैखिक प्रोग्रामन में पहली समस्या को सूत्रबद्ध किया। दोनों ने अलग–अलग कार्य किया। यह एक सुविख्यात परिवहन समस्या (Transportation Problem) है जो रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming) की ही एक शाखा बनाती है।

1945 में एक अंग्रेज अर्थशास्त्री जी. स्टिग्लर ने एक दूसरी रैखिक प्रोग्रामन समस्या का वर्णन किया, जिसमें संतुलित आहार के लिए गणना की गई। मुख्यतया यह समस्या 77 प्रकार के आहारों के गुणों की गणना के लिए थी, जिन्हें निम्नतम मूल्य पर ही नहीं बल्कि नौ पौष्टिक तत्वों की जरूरत को पूरा करने के लिए खरीदा जाना था।

1947 में एक अमेरिकी अर्थशास्त्री जी.बी. डान्जिग ने प्रसिद्ध पत्रिका 'इकोनोमेट्रिका' में एक लेख प्रकाशित किया जिसमें उसने रैखिक प्रोग्रामन समस्या को सूत्रबद्ध किया। डान्जिग को पद 'रैखिक प्रोग्रामन' प्रयोग करने तथा समस्या का विधि से हल करने का श्रेय भी दिया जाता है।

1974 में एल. कन्टोरोविच को एक दूसरे प्रसिद्ध अमेरिकी गणितज्ञ–अर्थशास्त्री टी.सी. कूपमान्स के साथ इन समस्याओं पर काम करने के लिए अर्थशास्त्र में नोबेल पुरस्कार दिया गया था।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे:

- रैखिक प्रोग्रामन में प्रयुक्त शब्दावली का ज्ञान
- व्यवहारिक समस्याओं को रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में बदलना
- आलेखीय विधि द्वारा रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करना

पूर्व ज्ञान

- विभिन्न सूचनाओं को रैखिक असमिकाओं में बदलना
- आलेखीय विधि से रैखिक असमिकाओं को हल करना

37.2 रैखिक प्रोग्रामन में प्रयुक्त विभिन्न पदों की परिभाषाएँ

भूमिका में दिए गए उदाहरणों के सूक्ष्म परीक्षण से एक मुख्य लक्षण चिन्हित होता है जो सभी समस्याओं के लिए उभयनिष्ठ है अर्थात् प्रत्येक उदहरण में, हम किसी राशि का अधिकतम या न्यूनतम मान ज्ञात करते हैं।

परिचय में दिए गए उदाहरण 1 तथा 2 में हम लगाए गए धन की अधिकतम वापसी चाहते हैं। उदाहरण 3 में हम श्रमिक मूल्य को न्यूनतम बनाना चाहते हैं। रैखीय प्रोग्रामन शब्दावली में किसी राशि को अधिकतम या न्यूनतम बनाना उस समस्या के उद्देश्य को निरूपित करता है।

37.2.1 वस्तुनिष्ठ फलन (Objective Functions)

रैखिक प्रोग्रामन समस्या में चरों का रैखिक फलन, z जिसका इष्टतम (Optimal) मान ज्ञात करना है वस्तुनिष्ठ फलन कहलाता है। यहाँ, रैखीय स्थिति से मतलब है कि निम्न प्रकार का गणितीय व्यंजक लिखना

$a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$, जहाँ $a_1, a_{2, ...} a_n$ स्थिरांक तथा $x_1, x_{2, ...} x_n$ चर हैं।

रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में उत्पाद, सेवाएँ, अनुसंधान आदि जो दिए गए सीमित **साधनों की हिस्सेदारी** के लिए एक–दूसरे से स्पर्धा करते हैं, चर या निर्णायक चर कहलाते हैं।

37. 2.2 प्रतिबन्ध

संसाधनों पर सीमाएँ (जैसे नकद–राशि, उत्पादन क्षमता, मानवशक्ति, समय, मशीन आदि) जो विभिन्न स्पर्धात्मक चरों में सम्बन्ध दर्शाती हैं, प्रतिबन्ध होती हैं। ये सीमाएँ रैखिक–समीकरण या असमिका के रूप में होती है, इन्हें प्रतिबन्ध (constraints) कहते हैं।

37.2.3 ऋणेतर प्रतिबन्ध

सभी चरों का ऋणेतर मान लिया जाता है क्योंकि भौतिकीय राशियों का मान ऋणात्मक होना असम्भव है।

37.3 रैखिक प्रोग्रामन समस्या को सूत्रबद्ध करना

रैखिक प्रोग्रामन समस्या को गणितीय मॉडल रूप में व्यवस्थापित करने के लिए निम्नलिखित चरणों को ध्यान में रखते हैं।

चरण 1 : उन निर्णायक चरों को पहचानिए जिनकी गणना की जानी है तथा उन्हें बीजीय चिन्हों के रूप में लिखिए जैसे $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots$

चरण 2 : दी गई समस्या में सभी सीमाओं को पहचानिए तथा उन्हें उपर्युक्त परिभाषित चरों के पदों में रैखिक समीकरण या असमिकाओं के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

चरण 3 : वस्तुनिष्ठ फलन जिसका इष्टतम (Optimum) मान ज्ञात करना है को पहचानिए तथा इसे उपर्युक्त परिभाषित चरों के रैखिक फलन के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

उदाहरण 37.1. एक फुटकर विक्रेता A तथा B प्रकार के रेडियो ट्रांजिस्टर खरीदना चाहता है। A प्रकार के प्रत्येक रेडियो का मूल्य 360.00 रुपये तथा B प्रकार के प्रत्येक रेडियो का मूल्य 240.00 रुपये है। फुटकर विक्रेता यह जानता है कि वह 20 सेट से अधिक नहीं बेच सकता इसलिए वह 20 सेट से अधिक नहीं खरीदता है। वह 5760.00 रुपये तक ही खर्च कर सकता है। वह A प्रकार के सेट पर 50.00 रुपये लाभ तथा B प्रकार के सेट पर 40.00 रुपए लाभ प्राप्त करना चाहता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए इस समस्या का गणितीय सूत्रण कीजिए।

हल : माना कि फुटकर विक्रेता A प्रकार के x_1 सेट तथा B प्रकार के x_2 सेट खरीदता है। क्योंकि प्रत्येक प्रकार के सेट की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

$$x_1 \geq 0, \qquad \cdots (1)$$

$$x_2 \geq 0, \qquad \cdots (2)$$

A प्रकार के x_1 सेट तथा B प्रकार के x_2 सेट का मूल्य $360\ x_1 + 240\ x_2$ है जो 5760.00 रुपये के बराबर या इससे कम होना चाहिए। अतः

$$360\,x_1 + 240\,x_2 \leq 5760$$

या $$3x_1 + 2x_2 \leq 48 \qquad \cdots (3)$$

दोनों प्रकार के सेट की कुल संख्या 20 से अधिक नहीं होनी चाहिए।

अतः $$x_1 + x_2 \leq 20 \qquad \cdots (4)$$

क्योंकि कुल लाभ A प्रकार के x_1 सेट तथा B प्रकार के x_2 सेट बेचने पर प्राप्त होता है। अतः फुटकर विक्रेता A प्रकार के सेटों पर $50\,x_1$ तथा B प्रकार के सेटों पर $40\,x_2$ लाभ कमाता है। अतः कुल लाभ निम्नलिखित होगा :

$$z = 50x_1 + 40x_2 \qquad \cdots (5)$$

अतः दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रण निम्नलिखित होगाः

x_1, x_2 का मान ज्ञात कीजिए जिससे

निम्न शर्तों के अन्तर्गत,

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 48 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \textbf{ प्रतिबन्ध}$$

z = $50x_1 + 40x_2$ **(वस्तुनिष्ठ फलन)** का मान अधिकतम हो जाए।

उदाहरण 37.2. ठण्डा पेय बनाने वाली एक कम्पनी बोतल भरने के दो यन्त्र लगाती है। एक यन्त्र स्थान P पर तथा दूसरा स्थान Q पर स्थित है। प्रत्येक यन्त्र विभिन्न तीन प्रकार के ठण्डे पेय A, B तथा C बनाता है। दोनों यन्त्रों की प्रत्येक दिन बोतल भरने की क्षमता निम्न प्रकार है :

	यन्त्र	
उत्पाद	P	Q
A	3000	1000
B	1000	1000
C	2000	6000

एक बाज़ार का निरीक्षण करने पर यह स्पष्ट होता है कि मई महीने के दौरान A प्रकार की कम से कम 24000 बोतलों, B प्रकार की कम से कम 16000 बोतलों तथा C प्रकार की कम से कम 48000 बोतलों की माँग होगी। P तथा Q यन्त्रों को प्रतिदिन चलाने के लिए क्रमशः 6000.00 रुपये तथा 4000.00 रुपये खर्च आता है। मई महीने में कम्पनी को प्रत्येक यन्त्र कितने दिन चलाना चाहिए, जिससे उत्पादन मूल्य न्यूनतम हो तथा बाजार की माँग पूरी हो जाए। समस्या का गणितीय सूत्रण कीजिए।

हल : माना कि बाजार की माँग की पूर्ति के लिए कम्पनी मई महीने में यन्त्र P को x_1 दिन तथा यन्त्र Q को x_2 दिन चलाती है।

यन्त्र P को प्रतिदिन चलाने का खर्चा 6000.00 रुपये है

अतः इसे x_1 दिन चलाने का खर्चा 6000 x_1 रुपये होगा।

यन्त्र Q को प्रतिदिन चलाने का खर्चा 4000 रुपये है

अतः इसे x_2 दिन चलाने का खर्चा 4000 x_2 रुपये होगा।

अतः दोनों यन्त्रों को चलाने का कुल खर्चा होगा :

$$z = 6000x_1 + 4000x_2 \qquad \cdots (1)$$

यन्त्र P प्रत्येक दिन A प्रकार के पेय की 3000 बोतलें बनाता है।

अतः x_1 दिनों में यन्त्र P, A प्रकार के पेय की 3000 x_1 बोतलें बनाएगा।

यन्त्र Q प्रत्येक दिन A प्रकार के पेय की 1000 बोतलें बनाता है।

अतः x_2 दिनों में यन्त्र Q, A प्रकार के पेय की 1000 x_2 बोतलें बनाएगा।

निर्धारित समय में A प्रकार के पेय का कुल उत्पादन निम्न होगा :

$3000\,x_1 + 1000\,x_2$

लेकिन इस प्रकार के पेय की कम से कम 24000 बोतलों की माँग होगी। अतः इस प्रकार के पेय का कुल उत्पादन इस माँग के बराबर या इससे अधिक होना चाहिए।

$\therefore \quad 3000x_1 + 1000x_2 \geq 24000$

या $\quad 3x_1 + x_2 \geq 24 \qquad \cdots (2)$

इसी प्रकार, अन्य दो पेय के लिए,

$1000x_1 + 1000x_2 \geq 16000$

या $\quad x_1 + x_2 \geq 16 \qquad \cdots (3)$

तथा

$2000x_1 + 6000x_2 \geq 48000$

या $\quad x_1 + 3x_2 \geq 24 \qquad \cdots (4)$

x_1 और x_2 क्योंकि दिनों की संख्या है अतः यह ऋणेतर है।

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad \cdots (5)$

इस प्रकार हमारी समस्या है : x_1 तथा x_2 का मान ज्ञात करना जो z को न्यूनतम बनाते हैं।

$z = 6000x_1 + 4000x_2$ ***(वस्तुनिष्ठ फलन)***

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \geq 24 \\ x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 24 \end{array}\right\} \qquad \textit{(प्रतिबन्ध)}$$

तथा $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

उदाहरण 37.3. एक कारखाना A तथा B दो प्रकार की वस्तुओं का उत्पादन करता है और A प्रकार की वस्तु को 2.00 रुपये लाभ तथा B प्रकार की वस्तु को 3.00 रुपये लाभ पर बेचता है। प्रत्येक वस्तु पर मशीनों G तथा H द्वारा कार्य होता है। A प्रकार की वस्तु को उत्पादित करने में G पर एक मिनट तथा H पर दो मिनट कार्य करने की जरूरत होती है। B प्रकार की वस्तु को उत्पादित करने में G पर एक मिनट तथा H पर एक मिनट कार्य करने की जरूरत होती है। एक कार्यदिवस के दौरान मशीन G, 6 घण्टे 40 मिनट से अधिक समय उपलब्ध नहीं होती है जबकि मशीन H, अधिकतम 10 घण्टे उपलब्ध होती है। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।

हल : माना कि A प्रकार की वस्तुओं की संख्या x_1 तथा B प्रकार की वस्तुओं की संख्या x_2 है। समस्या में दी गई सूचनाओं को निम्नलिखित तालिका के रूप में व्यवस्थापित कर सकते हैं :

मशीन	वस्तुओं पर कार्य समय (मिनट में)		उपलब्ध समय (मिनट में)
	A प्रकार (x_1 इकाई)	B प्रकार (x_2 इकाई)	
G	1	1	400
H	2	1	600
प्रति इकाई लाभ	2.00 रुपये	3.00 रुपये	

क्योंकि, A प्रकार की प्रत्येक वस्तु पर लाभ 2 .00 रुपये हैं। अतः A प्रकार की x_1 वस्तुओं को बेचने पर लाभ $2x_1$. होगा। इसी प्रकार B प्रकार की x_2 वस्तुओं को बेचने पर लाभ $3x_2$. होगा। अतः A प्रकार की x_1 वस्तुओं तथा B प्रकार की x_2 वस्तुओं को बेचने पर कुल लाभ निम्नलिखित होगा :

$z = 2x_1 + 3x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन) $\cdots(1)$

क्योंकि मशीन G, A प्रकार पर एक मिनट तथा B प्रकार पर एक मिनट लेती है अतः मशीन G पर कुल आवश्यक मिनट $x_1 + x_2$ होगी।

लेकिन मशीन G, 6 घंटे 40 मिनट (400 मिनट) से अधिक समय के लिए उपलब्ध नहीं है। अतः

$x_1 + x_2 \leq 400$ $\cdots(2)$

इसी प्रकार मशीन H पर कुल आवश्यकता $2x_1 + x_2$ मिनट होंगी। लेकिन मशीन H, *10* घंटे के लिए उपलब्ध है। अतः

$2x_1 + x_2 \leq 600$ $\cdots(3)$

क्योंकि ऋणात्मक वस्तुएँ उत्पन्न करना सम्भव नहीं है अतः

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ $\cdots(4)$

अतः समस्या है x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात करना जो z को अधिकतम बनाएं जबकि $z = 2x_1 + 3x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन)

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \leq 400$$
$$2x_1 + x_2 \leq 600$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

उदाहरण 37.4. एक फर्नीचर निर्माता दो प्रकार– A तथा B प्रकार के सोफे बनाता है। सरलता के लिए वह उत्पादन क्रिया को तीन विभिन्न क्रियाओं–बढ़ईगीरी, परिष्कृत करना, गद्दार बनाना, में बाँट लेता है। A प्रकार के सोफे के निर्माण में 6 घंटे बढ़ईगीरी में, 1 घंटा परिष्कृत करने में तथा 2 घंटे गद्दार बनाने में लगते हैं। B प्रकार के सोफे के निर्माण में 3 घंटे बढ़ईगीरी में, 1 घंटा परिष्कृत करने में तथा 6 घंटे गद्दार बनाने

में लगते हैं। कुशल कारीगरों, औजारों तथा सुविधाओं की सीमित उपलब्धताओं की वजह से कारखाने में प्रत्येक दिन 96 मानव घंटे बढ़ईगीरी के लिए, 18 मानव घंटे परिष्कृत करने तथा 72 मानव घंटे गद्देदार बनाने के लिए उपलब्ध है। A प्रकार के प्रत्येक सोफा पर 80 रुपये लाभ तथा B प्रकार के प्रत्येक सोफा पर 70 रुपये लाभ होता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए प्रत्येक दिन A तथा B प्रकार के कितने सोफे बनाने चाहिएँ?। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्र–बद्ध कीजिए।

हल : विभिन्न क्रियाओं तथा प्रत्येक क्रिया के लिए आवश्यक मानव समय को निम्न तालिका के रूप में दर्शाया गया है :

क्रियाएँ	**सोफा A प्रकार**	**सोफा B प्रकार**	**उपलब्ध श्रम**
बढ़ईगीरी	6 घंटे	3 घंटे	96 मानव घंटे
परिष्कृत करना	1 घंटा	1 घंटा	18 मानव घंटे
गद्देदार बनाना	2 घंटे	6 घंटे	72 मानव घंटे
लाभ	80.00 रुपये	70.00 रुपये	

माना कि A प्रकार के सोफों की संख्या x_1 तथा B प्रकार के सोफों की संख्या x_2 है।

तालिका की प्रत्येक पंक्ति एक प्रतिबन्ध बनाती है।

पहली पंक्ति दर्शाती है कि बढ़ईगीरी के A प्रकार के प्रत्येक सोफा के लिए 6 घंटे तथा B प्रकार के प्रत्येक सोफे के लिए 3 घंटे आवश्यक हैं प्रत्येक दिन बढ़ईगीरी के लिए केवल 96 मानव घंटे उपलब्ध ा हैं। प्रत्येक दिन A प्रकार के x_1 सोफे तथा B प्रकार के x_2 सोफे बनाने के लिए कुल मानव घंटों की गणना निम्न प्रकार कर सकते हैं :

बढ़ईगिरी के लिए प्रत्येक दिन मानव घंटों की संख्या = { (बढ़ईगीरी के लिए A प्रकार के प्रत्येक सोफा के लिए आवश्यक घंटे)$\times$(A प्रकार के सोफों की संख्या) } + { (बढ़ईगीरी के लिए B प्रकार के प्रत्येक सोफा के लिए आवश्यक घंटे)$\times$(B प्रकार के सोफों की संख्या) }

$$= 6x_1 + 3x_2$$

लेकिन प्रत्येक दिन बढ़ईगीरी के लिए अधिकतम 96 मानव घंटे उपलब्ध हैं। अतः

$$6x_1 + 3x_2 \le 96$$

या $\quad 2x_1 + x_2 \le 32 \qquad \cdots(1)$

इसी प्रकार तालिका की द्वितीय तथा तृतीय पंक्ति क्रमशः परिष्कृत करने तथा गद्देदार बनाने की सीमाओं को दर्शाती है। अतः

$$x_1 + x_2 \le 18 \qquad \cdots(2)$$

तथा $\quad 2x_1 + 6x_2 \le 72$

या $\quad x_1 + 3x_2 \le 36 \qquad \cdots(3)$

क्योंकि सोफों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad \cdots (4)$$

अब, लाभ दो स्रोतों A प्रकार के सोफा तथा B प्रकार के सोफा, से प्राप्त होता है। अतः

लाभ = (A प्रकार के सोफों से लाभ) + (B प्रकार के सोफों से लाभ)

= { (A प्रकार के प्रत्येक सोफे पर लाभ) $\times$ (A प्रकार के सोफों की संख्या) }

+ { (B प्रकार के प्रत्येक सोफे पर लाभ) $\times$ (B प्रकार के सोफों की संख्या) }

$z = 80x_1 + 70x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन) $\cdots (5)$

अब, समस्या है कि x_1 तथा x_2 का मान ज्ञात करना है जिससे z का अधिकतम मान प्राप्त हो।

जबकि $\mathbf{z = 80\, x_1 + 70\, x_2}$ **(वस्तुनिष्ठ फलन)**

निम्न शर्तों के अन्तर्गत,

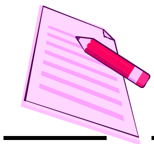
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 32 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 36 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(प्रतिबन्धा)}$$

देखें आपने कितना सीखा 37.1

1. एक कम्पनी दो वस्तुएँ A तथा B बनाती है। प्रत्येक वस्तु पर दो मशीनों G तथा H से कार्य होता है। वस्तु A को उत्पादित करने के लिए मशीन G पर 3 घंटे तथा मशीन H पर 4 घंटे तथा वस्तु B को उत्पादित करने के लिए मशीन G पर 4 घंटे तथा मशीन H पर 5 घंटे कार्य करने की जरूरत होती है। मशीन G तथा H पर कार्य करने के लिए उपलब्ध समय क्रमशः 18 घंटे तथा 21 घंटे है। वस्तुएँ A तथा B क्रमशः 3.00 रुपये तथा 8.00 रुपये प्रति इकाई के लाभ पर बेची जा सकती हैं। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।

2. एक फर्नीचर व्यापारी दो वस्तुओं मेज तथा कुर्सी का व्यापार करता है। व्यापार में उपयेाग करने के लिए उसके पास 5000 रुपये हैं तथा अधिकतम 60 वस्तुओं को रखने के लिए जगह है। एक मेज का मूल्य 250 रुपये तथा एक कुर्सी का मूल्य 50 रुपये है वह एक मेज को 50 रुपये लाभ पर तथा एक कुर्सी को 15 रुपये लाभ पर बेचता है। यह मानकर कि वह खरीदी गई सभी वस्तुएँ बेच सकता है, अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए उसे अपना धन किस प्रकार व्यापार में लगाना चाहिए? इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।

3. स्थान P तथा स्थान Q पर एक दुग्धशाला के दो यंत्र लगे हैं। प्रत्येक यंत्र एक किग्रा. पैकिट में दो प्रकार के उत्पाद A तथा B बनाते हैं। प्रत्येक दिन पैकिट बनाने की दोनों यंत्रों की क्षमता इस प्रकार है :



	यंत्र	
उत्पाद	P	Q
A	2000	1500
B	4000	6000

बाजार में एक निरीक्षण करने पर ज्ञात हुआ कि अप्रैल महीने में A प्रकार के कम से कम 20000 पैकिट तथा B प्रकार के कम से कम 16000 पैकिट की माँग होगी। P तथा Q यंत्रों को प्रतिदिन चलाने के लिए क्रमशः 4000 रुपये तथा 7500 रुपये खर्च होंगे। अप्रैल महीने में कम्पनी को प्रत्येक यंत्र कितने दिन चलाना चाहिए जिससे उत्पादन मूल्य न्यूनतम हो तथा बाजार की माँग भी पूरी हो जाए। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।

4. एक कारखाने में दो वस्तुओं A तथा B का निर्माण होता है। वस्तु A को बनाने के लिए मशीन पर 1 घंटा 30 मिनट कार्य करना पड़ता है तथा इसके अतिरिक्त एक शिल्पकार को 2 घंटे कार्य करना पड़ता है। वस्तु B को बनाने के लिए मशीन पर 2 घंटे 30 मिनट कार्य करना पड़ता है तथा इसके अतिरिक्त एक शिल्पकार को 1 घंटा 30 मिनट कार्य करना पड़ता है। एक सप्ताह में कारखाने में 80 घंटे मशीन पर समय तथा 70 घंटे शिल्पकार का समय उपलब्ध हो सकता है। प्रत्येक A वस्तु पर 5.00 रुपये लाभ तथा प्रत्येक B वस्तु पर 4.00 रुपये लाभ होता है। यदि बनाई गई सभी वस्तुएँ बेच दी जाएँ तो बताइए प्रत्येक प्रकार की कितनी वस्तुएँ बनाई जाएँ जिस से हर सप्ताह अधिकतम लाभ प्राप्त हो। समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए।

37.4 रैखिक प्रोग्रामन समस्या–ज्यामितीय विधि

दो चरों x तथा y में एक सरल प्रश्न लेते हैं। x तथा y के मान ज्ञात कीजिए, जो निम्नलिखित समीकरणों को संतुष्ट करते हैं :

$$x + y = 4$$
$$3x + 4y = 14$$

इन समीकरणों को हल करने पर $x = 2$ तथा $y = 2$ प्राप्त होता है। जब समीकरणों तथा चरों की संख्या अधिक हो तो क्या होता है?

इस प्रकार के समीकरण निकायों के लिए, क्या हम अद्वितीय हल प्राप्त कर सकते हैं?

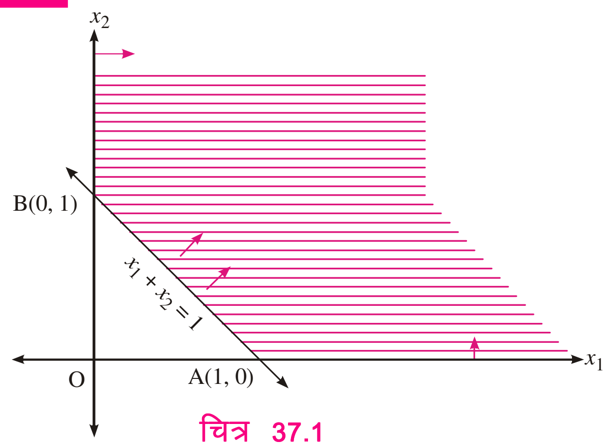
तथापि, n चरों में समीकरण निकायों के लिए अद्वितीय हल तभी प्राप्त किया जा सकता है जबकि ठीक n संबंध (समीकरण) दिए हों। जब संबंधों (समीकरणों) की संख्या n से अधिक या कम हो तो क्या होगा?

अद्वितीय हल संभव नहीं होंगे लेकिन परीक्षणीय हल (Trial solution) प्राप्त किए जा सकते हैं। फिर, यदि संबंधों की संख्या चरों की संख्या से अधिक या कम हो तथा संबंध असमिका (Inequation) के रूप में हैं, क्या हम इस प्रकार के निकायों का हल प्राप्त कर सकते हैं?

जब कभी एक समस्या का विश्लेषण, जिसमें चर को कई रैखिक असमिकाओं का पालन करते हुए एक रैखिक व्यंजक को न्यूनतम या अधिकतम बनाने को अग्रसर होता हो तो उसका हल रैखिक प्रोग्रामन कला का उपयेाग करके प्राप्त किया जा सकता है। रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं जिनमें केवल दो चर होते हैं को हल करने का तरीका ज्यामितीय तरीका है, जिसे **रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आलेखीय हल कहते हैं।**

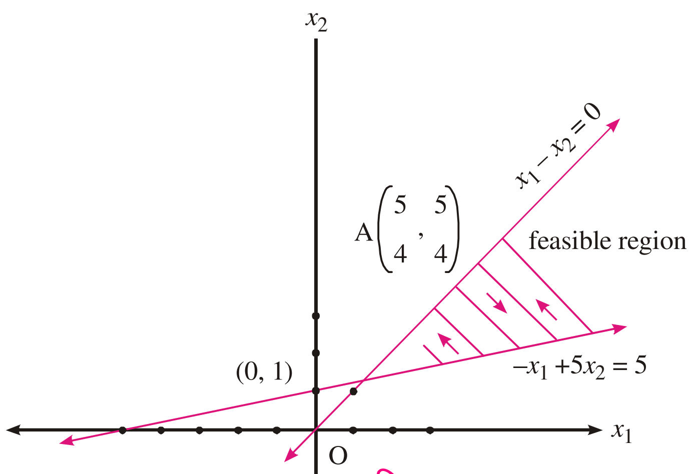
37.5 रैखिक प्रोग्रामन समस्या का हल

पिछले अनुच्छेद में हमने ऐसी समस्याओं को देखा है जिनमें संबंधों की संख्या चरों की संख्या के बराबर नहीं है तथा बहुत से संबंधों को असमिका (अर्थात् $\leq$ या $\geq$) के रूप में दर्शाया गया है जिनमें दी गई शर्तों के अन्तर्गत चरों के फलन को अधिकतम (या न्यूनतम) करना होता है।



चित्र 37.1

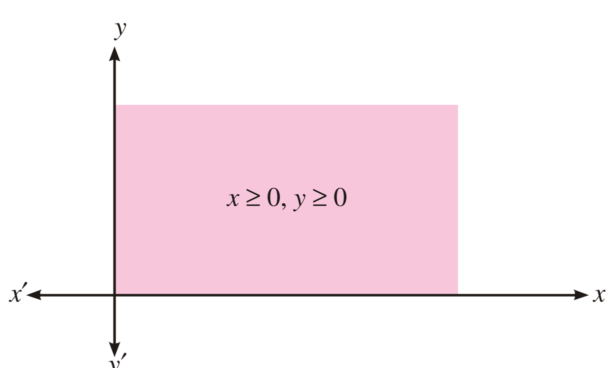
हम जानते हैं कि $x \geq 0$, y-अक्ष सहित y-अक्ष के दाईं ओर के भाग को दर्शाता है (चित्र 37.1) इसी प्रकार $y \geq 0$, x-अक्ष के उपर के भाग को दर्शाता है (चित्र 37.2)



चित्र 37.2

अब प्रश्न यह है कि ऐसी समस्याओं का हल कैसे प्राप्त किया जा सकता है?

अब प्रश्न उठता है कि एक साथ $x \geq 0$, तथा $y \geq 0$ किस भाग को प्रदर्शित करते हैं। स्पष्टत: $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ द्वारा प्रदर्शित भाग में वे सभी बिन्दु होते हैं जो दोनों $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ में उभयनिष्ठ होते हैं। यह तल में प्रथम चतुर्थांश होगा। (चित्र 37.3)

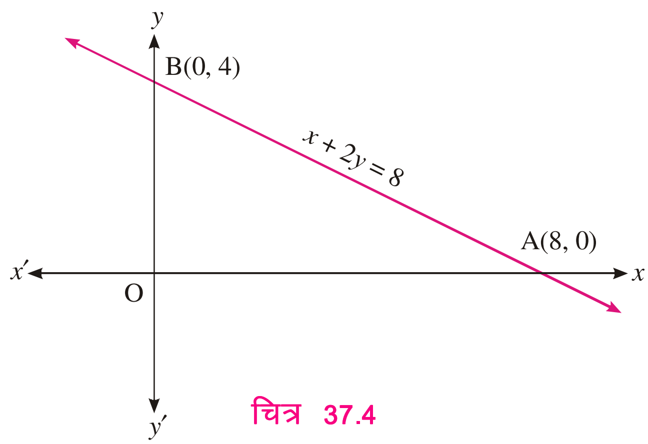


चित्र 37.3

आगे, हम असमिका $x + 2y \leq 8$ का आलेख लेते हैं। इसके लिए, पहले रेखा $x + 2y = 8$ खींचते हैं और तब वह भाग मालूम करते हैं जो $x + 2y \leq 8$ को सन्तुष्ट करता है।

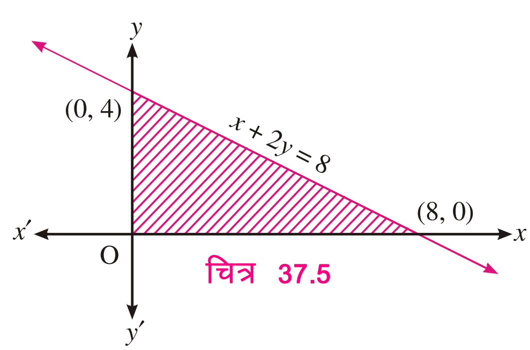
सामान्यतया, मान प्राप्त करने के लिए, हम $x = 0$ लेते हैं तथा y का इसके तुल्य मान ज्ञात करते हैं। इसी प्रकार हम $y = 0$ लेते हैं तथा इसके तुल्य x का मान ज्ञात करते हैं। (यदि रेखा दोनों अक्षों में से किसी एक के समान्तर है या मूल बिन्दु से गुजरती है तो यह विधि उपयुक्त नहीं है। इस स्थिति में हम x तथा y के कोई भी ऐसे सम्भावित मान लेते हैं, जो समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।)

बिन्दुओं (0,4) तथा (8,0) को ग्राफ पर दर्शाकर, उन्हें सीधी रेखा से मिलाने पर हमें रेखा का आलेख प्राप्त होता है जैसाकि चित्र 37.4 में दर्शाया गया है।



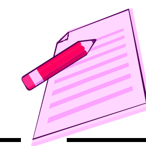
चित्र 37.4

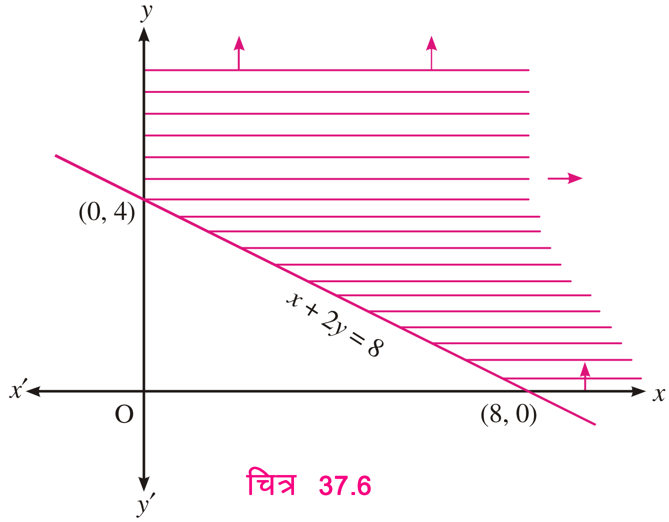
हम पहले ही देख चुके हैं कि $x \geq 0$ तथा $y \geq 0$ प्रथम चतुर्थांश को दर्शाते हैं। $x + 2y < 8$ द्वारा प्रदर्शित आलेख रेखा $x + 2y = 8$ के उस तरफ होता है जिस ओर मूल बिन्दु होता है क्योंकि इस भाग का कोई भी बिन्दु असमिका को सन्तुष्ट करता है। अतः चित्र 37.5 में छायांकित भाग $x \geq 0$, $y \geq 0$ तथा $x + 2y \leq 8$ को प्रदर्शित करता है।



चित्र 37.5

इसी प्रकार यदि हम $x \geq 0$, $y \geq 0$ तथा $x + 2y \geq 8$, से घिरा भाग लेते हैं तो यह प्रथम चतुर्थांश में होगा तथा रेखा $x + 2y = 8$ के उस तरफ होगा, जिस तरफ मूलबिन्दु स्थित नहीं है। चित्र 37.6 में छायांकित भाग आलेख को प्रदर्शित करता है।





चित्र 37.6

छायांकित भाग जिसमें दिए गए सभी प्रतिबन्ध सन्तुष्ट हो जाते हैं संभाव्य **(Feasible)** क्षेत्र कहलाता है।

37.5.1 संभाव्य (सुसंगत) (Feasible) हल

रैखिक प्रोग्रामन–समस्या के चरों के वे मान जो सभी प्रतिबन्धों तथा ऋणेतर प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करते हैं समस्या के **संभाव्य (feasible)** हल कहलाते हैं।

37.5.2 इष्टतम (Optimal) हल

रैखिक प्रोग्रामन समस्या के वे संभाव्य हल जो अपने वस्तुनिष्ठ फलन को अधिकतम या न्यूनतम बनाते हैं, समस्या के इष्टतम **(optimal)** हल कहलाते हैं।

> टिप्पणी : *यदि कोई भी संभाव्य हल वस्तुनिष्ठ फलन को अधिकतम (या न्यूनतम) नहीं बनाता है या समस्या का संभाव्य हल नहीं है तो रैखिक प्रोग्रामन समस्या का कोई हल नहीं होता है।*

रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आलेख–विधि से हल प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित चरण हैं :

चरण 1 : रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय सूत्रण करना।

चरण 2 : प्रतिबन्धित असमिकाओं का आलेख बनाना (उपर्युक्त बताई गई विधि से)।

चरण 3 : सम्भावित क्षेत्र को पहचानना जो एक साथ सभी प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता हो। छोटा या बराबर ($\leq$) प्रतिबन्धों के लिए समान्यतया भाग रेखा के नीचे होता है। बड़ा या बराबर ($\geq$) प्रतिबन्धों के लिए भाग समान्यतया रेखाओं से ऊपर होता है।

चरण 4 : सम्भावित क्षेत्र में हल बिन्दुओं को स्थापित कीजिए। ये बिन्दु सम्भावित क्षेत्र के कोनों पर होते हैं।

चरण 5 : प्रत्येक कोने पर बिन्दु के लिए वस्तुनिष्ठ फलन की गणना कीजिए।

चरण 6 : वस्तुनिष्ठ फलन के इष्टतम मानों की पहचान कीजिये।

उदाहरण 37.5. राशि z का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए :

$z = x_1 + 2x_2$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

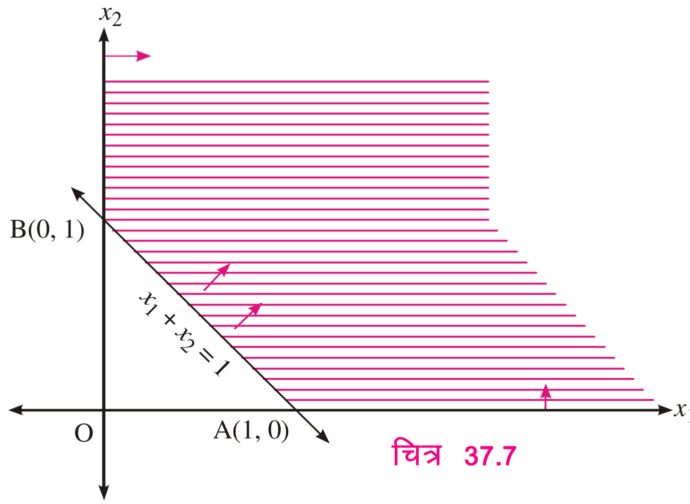
$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

हल : $z = x_1 + 2x_2$ वस्तुनिष्ठ फलन है, जिसका न्यूनतम मान ज्ञात करना है। निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



चित्र 37.7

सर्वप्रथम हम इन असमिकाओं के लिए आलेख खींचते हैं जो इस प्रकार है :

जैसाकि हम पहले बता चुके हैं कि वह भाग जो $x_1 \geq 0$ तथा $x_2 \geq 0$ को सन्तुष्ट करता है प्रथम चतुर्थांश होता है और वह भाग जो $x_1 + x_2 \geq 1$ के साथ–साथ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ को संतुष्ट करता है, रेखा $x_1 + x_2 = 1$ के उस ओर है जिस ओर मूल बिन्दु नहीं है। अतः छायांकित भाग सम्भावित हल होगा क्योंकि इस भाग का प्रत्येक बिन्दु सभी प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है। अब, हमको इष्टतम हल प्राप्त करना है। सम्भावित क्षेत्र के कोने A (1,0) तथा B (0,1) हैं।

A पर z का मान = 1

B पर z का मान = 2

सम्भावित भाग में कोई दूसरे बिन्दु माना कि (1,1), (2,0), (0,2) लेने पर हम देखते हैं कि A (1, 0) पर z का न्यूनतम मान होता है।

उदाहरण 37.6. राशि z का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये :

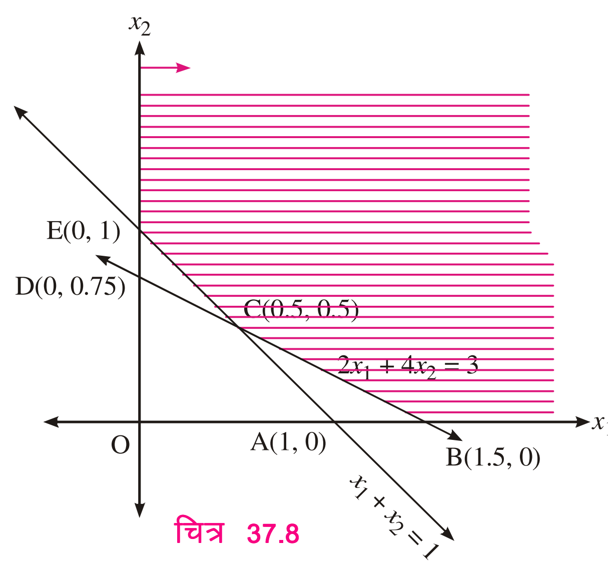
$z = x_1 + 2x_2$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$x_1 + x_2 \geq 1$

$2x_1 + 4x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



चित्र 37.8

हल : $z = x_1 + 2x_2$ वस्तुनिष्ठ फलन है, जिसका न्यूनतम मान ज्ञात करना है।

निम्न प्रतिबन्धों के अंतर्गत

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

सर्वप्रथम हम इन असमिकाओं का आलेख खींचते हैं (जैसा पहले वर्णन किया गया है) जो इस प्रकार है:

छायांकित भाग सम्भावित क्षेत्र है। इस क्षेत्र का प्रत्येक बिन्दु सभी गणितीय असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है और अतः ये ही सम्भावित हल हैं।

अब हमें इष्टतम हल प्राप्त करने हैं।

$B\ (1.5, 0)$ पर z का मान 1.5 है।

$C\ (0.5, 0.5)$ पर z का मान 1.5 है।

E (0,1) पर z का मान 2 है।

यदि हम रेखा $2x_1 + 4x_2 = 3$ पर B तथा C के बीच कोई बिन्दु लेते हैं तो हमें $\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है और अन्य कहीं भी सम्भावित क्षेत्र में $\frac{3}{2}$ से अधिक प्राप्त होगा। $2x_1 + 4x_2 = 3$ पर कोई भी सम्भावित बिन्दु (B तथा C के बीच) वस्तुनिष्ठ फलन $z = x_1 + 2x_2$ को न्यूनतम बनाता है, इसका कारण है कि दोनों रेखाएँ समान्तर हैं (दोनों की प्रवणता $-\frac{1}{2}$ है)। इस प्रकार रैखिक प्रोग्रामन समस्या के अनन्त हल होंगे जिनमें से दो हल कोनों पर प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 37.7. $z = 0.25x_1 + 0.45x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये

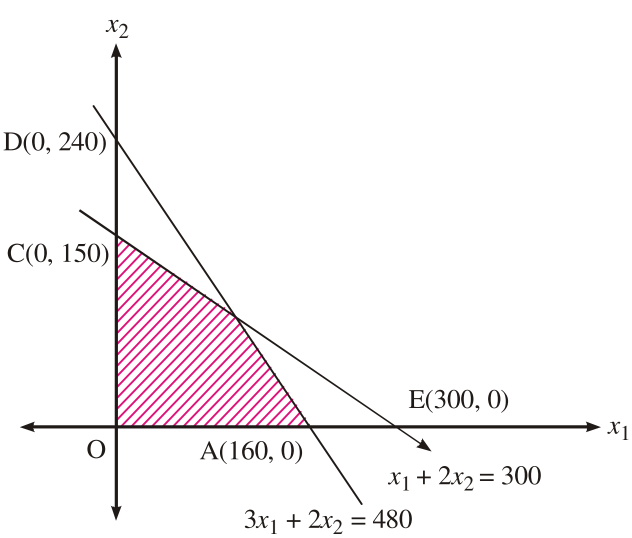
निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + 2x_2 \leq 300$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 480$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

हल : $z = 0.25x_1 + 0.45x_2$ वस्तुनिष्ठ फलन है जिसका अधिकतम मान प्राप्त करना है।

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + 2x_2 \leq 300$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 480$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



चित्र 37.9

सर्वप्रथम हम इन असमिकाओं का आलेख खींचते हैं जो इस प्रकार है :

N k; kâd r Hkkx $OABC$ सम्भावित क्षेत्र है। इस भाग में प्रत्येक बिन्दु सभी गणितीय असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है, अतः ये ही सम्भावित हल हैं।

अब हमें इष्टतम हल प्राप्त करना है।

A (160, 0) पर z का मान 40.00 है।

B (90, 105) पर z का मान 69.75 है।

C (0, 150) पर z का मान 67.50 है।

O (0, 0) पर z का मान 0 है।

यदि हम सम्भावित क्षेत्र से कोई दूसरे मान जैसे कि (60, 120), (80, 80) आदि लेते हैं फिर भी सम्भावित क्षेत्र के कोने B (90, 105) पर प्राप्त मान 69.75 अधिकतम मान है।

टिप्पणीः किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए जिसका हल सम्भव है, निम्नलिखित सामान्य नियम सत्य है।

यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक हल है तो यह सम्भावित हलों के समूह के एक शीर्ष पर स्थित होता है, यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या के अनेक हल हों तो उनमें से कम–से–कम एक सम्भावित हल, हलों के समूह के एक शीर्ष पर स्थित होता है। दोनों स्थिति में वस्तुनिष्ठ फलन का अद्वितीय मान होता है।

उदाहरण 37.8. एक लघु उद्योग में एक निर्माता दो प्रकार की पुस्तक अलमारी बनाता है। पहले प्रकार की पुस्तक अलमारी को पूर्ण बनाने के लिए मशीन A पर 3 घंटे तथा मशीन B पर 2 घंटे आवश्यक होते हैं। दूसरे प्रकार की पुस्तक अलमारी के लिए मशीन A पर 3 घंटे तथा मशीन B पर 3 घंटे आवश्यक होते हैं। प्रतिदिन मशीन A अधिकतम 18 घंटे तथा मशीन B अधिकतम 14 घंटे चल सकती है। पहले प्रकार की प्रत्येक पुस्तक अलमारी पर वह 30 रुपये लाभ तथा दूसरे प्रकार की प्रत्येक पुस्तक अलमारी पर 40 रुपये लाभ कमाता है। प्रत्येक दिन वह प्रत्येक प्रकार की कितनी पुस्तक अलमारी बनाए जिससे उसे अधिकतम लाभ प्राप्त हो?

हल : माना कि निर्माता प्रत्येक दिन पहले प्रकार की x_1 पुस्तक अलमारी तथा दूसरे प्रकार की x_2 पुस्तक अलमारी बनाता है। क्योंकि x_1 तथा x_2 पुस्तक अलमारियों की संख्या है, इसलिए

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad \cdots \textbf{(1)}$$

क्योंकि पहले प्रकार की पुस्तक अलमारी के लिए मशीन A पर 3 घंटे आवश्यक है। अतः x_1 पुस्तक अलमारियों के लिए मशीन A पर $3x_1$ घंटे आवश्यक होंगे। दूसरे प्रकार की पुस्तक अलमारियों के लिए मशीन A पर 3 घंटे आवश्यक है। अतः x_2 पुस्तक अलमारियों के लिए मशीन A पर $3x_2$ घंटे आवश्यक होंगे। लेकिन मशीन A की प्रतिदिन कार्य क्षमता अधिक–से–अधिक 18 घंटे हैं। अतः

$$3x_1 + 3x_2 \leq 18$$

या $x_1 + x_2 \le 6$ ... **(2)**

इसी प्रकार, मशीन *B* पर पहले प्रकार की पुस्तक अलमारी 2 घंटे तथा दूसरे प्रकार की पुस्तक अलमारी 3 घंटे लेती है। मशीन की प्रतिदिन कार्यक्षमता अधिक–से–अधिक 14 घंटे हैं। अतः

$2x_1 + 3x_2 \le 14$ ... **(3)**

प्रतिदिन का लाभ

$z = 30x_1 + 40x_2$ ... **(4)**

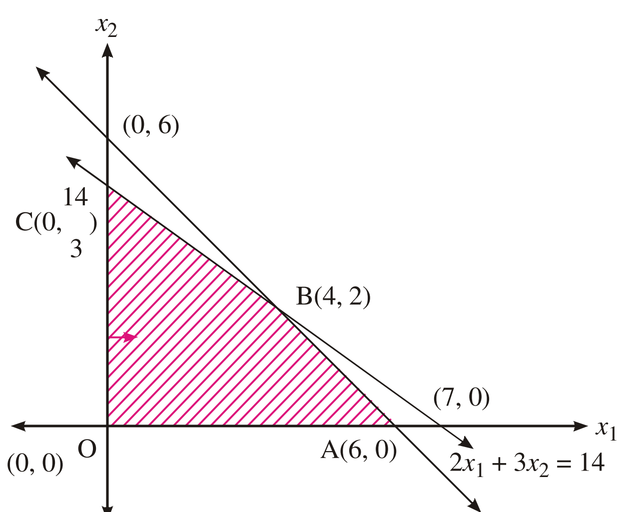
अब हमें x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात करने हैं जिससे कि z का अधिकतम मान प्राप्त हो।

अधिकतम $z = 30x_1 + 40x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन)

निम्न शर्तों के अन्तर्गत :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \text{प्रतिबन्ध}$$

इस समस्या का हल प्राप्त करने के लिए हम आलेखीय विधि प्रयोग करते हैं। सर्वप्रथम हम इन असमिकाओं के आलेख खींचते हैं जो निम्न प्रकार हैं :



चित्र 37.10

छायांकित भाग OABC सम्भावित क्षेत्र है। इस क्षेत्र में प्रत्येक बिन्दु सभी गणितीय असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है अतः ये ही सम्भावित हल हैं।

हम जानते हैं कि कोनों *O* (0, 0), *A* (6, 0). तथा *B* (4,2) पर इष्टतम हल प्राप्त किए जा सकते हैं। क्योंकि *C* के निर्देशांक पूर्णांक नहीं हैं, अतः हम इस बिन्दु पर विचार नहीं करते हैं। रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु *B* के निर्देशांकों की गणना की जा सकती है।

बिन्दु *O* पर लाभ शून्य है।

A पर लाभ $= 30 \times 6 + 40 \times 0$

$= 180$

B पर लाभ $= 30 \times 4 + 40 \times 2$

$= 120 + 80$

$= 200$

इस प्रकार, यदि निर्माता पहले प्रकार की 4 पुस्तक अलमारियाँ तथा दूसरे प्रकार की 2 पुस्तक अलमारियाँ बनाता है तो वह 200 रुपये का अधिकतम लाभ प्राप्त करता है।

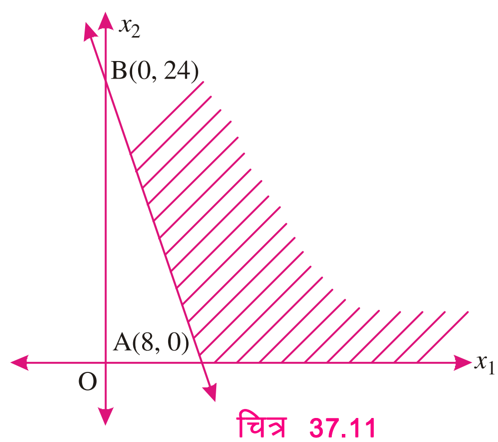
उदाहरण 37.9. उदाहरण 37.2 को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

हल : उदाहरण 37.2 से,

न्यूनतम $z = 6000\, x_1 + 4000\, x_2$ (वस्तुनिष्ठ फलन)

निम्न शर्तों के अन्तर्गत :

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 24 \\ x_1 + x_2 &\geq 16 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 24 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{(प्रतिबन्ध)}$$



चित्र 37.11

स्पष्टतया, प्रथम चतुर्थांश में कोई बिन्दु (x_1, x_2) प्रतिबन्ध $x_1 \geq 0$, तथा $x_2 \geq 0$, को सन्तुष्ट करता है। अब, हम रेखाओं को ग्राफ पर खींचते हैं :

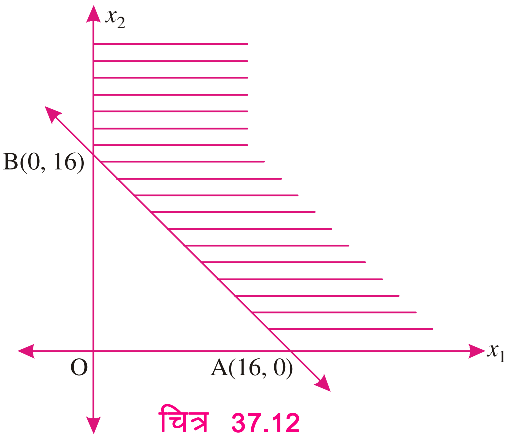
$$3x_1 + x_2 = 24$$

या $$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{24} = 1$$

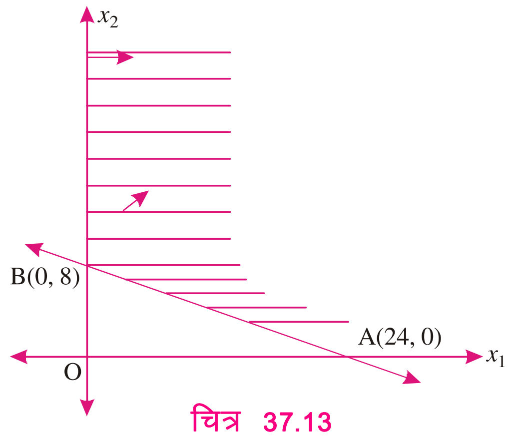
रेखा $3x_1 + x_2 = 24$ पर कोई भी बिन्दु प्रतिबन्ध $3x_1 + x_2 \geq 24$ को सन्तुष्ट करता है (चित्र 37.11)

इसी प्रकार कोई भी बिन्दु जो रेखा $x_1 + x_2 = 16$ पर हो या इसके ऊपर हो, प्रतिबन्ध $x_1 + x_2 \geq 16$ को सन्तुष्ट करता है (चित्र 37.12)

पुनः कोई भी बिन्दु जो रेखा $x_1 + 3x_2 = 24$ पर या इसके ऊपर है प्रतिबन्ध $x_1 + 3x_2 \geq 24$ को सन्तुष्ट करता है (चित्र 37.13)



चित्र 37.12

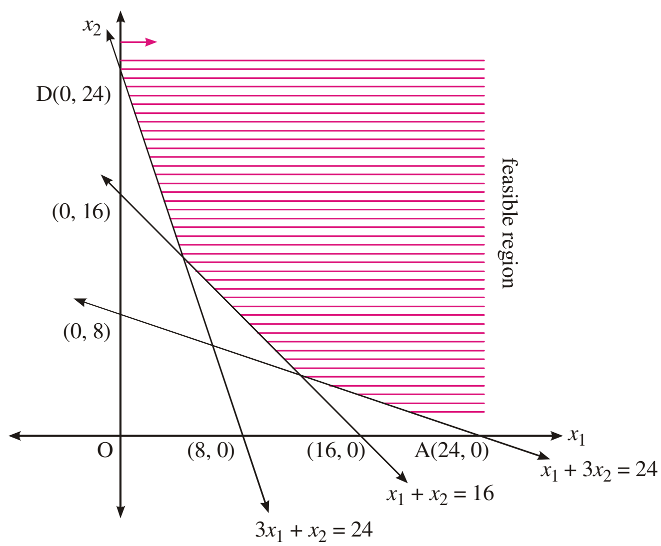


चित्र 37.13

अतः उपरोक्त सभी चित्रों को मिलाकर हम उभयनिष्ठ छायांकित असीमित क्षेत्र प्राप्त करते हैं। (चित्र 37.14)

बिन्दुओं A (24,0), B(12,4), C(4,12) तथा D(0,24) में से एक बिन्दु पर

$z = 6000x_1 + 4000x_2$ का न्यूनतम मान होगा।



चित्र 37.14

A पर, $z = 6000 \times 24 + 0$

$= 144000$

B पर, $z = 6000 \times 12 + 4000 \times 4$

$= 88000$

C पर, $z = 6000 \times 4 + 4000 \times 12 = 72000$

D पर, $z = 0 + 4000 \times 24 = 96000$

अतः हम देखते हैं कि C (4, 12) पर z का न्यूनतम मान है जहाँ $x_1 = 4$ तथा $x_2 = 12$.

अतः न्यूनतम मूल्य के लिए, कम्पनी को यंत्र P, 4 दिन तथा यंत्र Q, 12 दिन चलाना चाहिए। न्यूनतम मूल्य 72000 रु. होगा।

उदाहरण 37.10. राशि $z = x_1 + 2x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए :

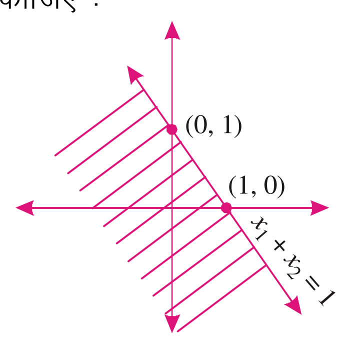
निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

हल : सर्वप्रथम हम प्रतिबन्धों

$$x_1 + x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

के आलेख खींचते हैं।



छायांकित क्षेत्र सम्भावित हल का समुच्चय है। अब हमें वस्तुनिष्ठ फलन को अधिकतम करना है।

$A(1, 0)$ पर z का मान 1 है।

$B(0, 1)$ पर z का मान 2 है।

यदि हम सम्भावित क्षेत्र से कोई दूसरे बिन्दु जैसे $(1, 1)$ या $(2, 3)$ या $(5, 4)$ आदि लें और इनके लिए z के मान ज्ञात करें तो हमें मालूम होता है कि हर बार एक बिन्दु के लिए पहले वाले बिन्दु की अपेक्षा बड़ा मान प्राप्त होता है। अतः कोई भी सम्भावित बिन्दु z का अधिकतम मान नहीं बनाता है। क्योंकि ऐसा कोई सम्भावित बिन्दु नहीं है जो z का मान अधिकतम बनाए। अतः हम यह मान लेते हैं कि इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या का कोई हल नहीं है।

उदाहरण 37.11. निम्नलिखित प्रश्न को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

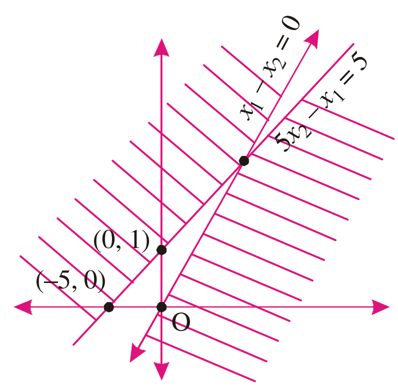
$z = 2x_1 - 10x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए,

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$x_1 - x_2 \geq 0$

$x_1 - 5x_2 \leq -5$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$



हल : पहले हम निम्न प्रतिबन्धों के आलेख खींचते हैं :

$x_1 - x_2 \geq 0$ $x_2 - x_1 \leq 0,$

$x_1 - 5x_2 \leq -5$ या $5x_2 - x_1 \geq 5$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ $x_1 - x_2 = 0$

छायांकित भाग सम्भावित क्षेत्र है।

यहाँ हम देखते हैं कि सम्भावित क्षेत्र एक तरफ से असीमित है।

परन्तु चित्र से यह स्पष्ट है कि वस्तुफलन बिन्दु A पर न्यूनतम मान प्राप्त करता है जो दो रेखाओं $x_1 - x_2 = 0$ तथा $-x_1 + 5x_2 = 5.$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है। इन्हें हल करने पर $x_1 = x_2 = \frac{5}{4}$ प्राप्त होता है।

अतः जब $x_1 = \frac{5}{4},\ x_2 = \frac{5}{4}$, तब z का मान न्यूनतम होता है।

न्यूनतम मान $= 2 \times \frac{5}{4} - 10 \times \frac{5}{4} = -10$ है।

टिप्पणी: *इन प्रतिबन्धों से यदि हम z का अधिकतम मान प्राप्त करना चाहें, तो यह सम्भव नहीं है क्योंकि सम्भावित क्षेत्र एक तरफ से खुला (असीमित) है।*

देखें आपने कितना सीखा 37.2

निम्नलिखित प्रश्नों को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

1. $z = 3x_1 + 4x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \le 40$$
$$x_1 + 2x_2 \le 60$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

2. $z = 2x_1 + 3x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \le 400$$
$$2x_1 + x_2 \le 600$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

3. $z = 60x_1 + 40x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, निम्न प्रतिबन्धों के अर्न्गत

$$3x_1 + x_2 \ge 24$$
$$x_1 + x_2 \ge 16$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 24$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

4. $z = 20x_1 + 30x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अर्न्गत

$$x_1 + x_2 \le 12,$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 50$$
$$x_1 + 3x_2 \le 30,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

5. $z = 50x_1 + 15x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$5x_1 + x_2 \le 100$$
$$x_1 + x_2 \le 60$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

6. $z = 4000x_1 + 7500x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$4x_1 + 3x_2 \ge 40$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

आइये दोहराएँ

- रैखिक प्रोग्रामन–गणितज्ञों द्वारा इष्टतम प्रश्नों को हल करने के लिए अपनाई गई तकनीक है।
- रैखिक प्रोग्रामन समस्या के चरों के मानों का एक समुच्चय जो दिए गए प्रतिबन्धों और ऋणेतर प्रतिबन्ध को संतुष्ट करता है, **सम्भावित हल** कहलाता है।
- रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक सम्भावित मान जो अपने वस्तुनिष्ठ फलन का इष्टतम मान देता है समस्या का **इष्टतम हल** कहलाता है।
- यदि कोई भी सम्भावित हल वस्तुनिष्ठ फलन का अधिकतम (या न्यूनतम) मान नहीं है या उसके सम्भावित हल नहीं हैं तो रैखिक प्रोग्रामन समस्या का कोई भी हल नहीं होगा।
- यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक हल है तो यह सम्भावित क्षेत्र के कोने पर स्थित होता है।

- यदि रैखिक प्रोग्रामन समस्या के अनेक हल हैं तो उनमें से कम–से–कम एक हल सम्भावित क्षेत्र के कोने पर स्थित होता है। लेकिन सभी स्थितियों में वस्तुनिष्ठ फलन का मान वही रहता है।

सहायक वेबसाइट

- *http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/morelp.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm*
- *http://www.youtube.com/watch?v=XbGM4LjM52k*

आइए अभ्यास करें

1. एक व्यापारी के पास चावल और गेहूँ खरीदने के लिए केवल ₹ 15,000 हैं। चावल के एक बोरे का मूल्य ₹ 1,500 तथा गेहूँ के एक बोरे का मूल्य ₹ 1,200 है। उसके पास केवल 10 बोरे रखने के लिए जगह उपलब्ध है। व्यापारी चावल और गेहूँ के प्रत्येक बोरे पर क्रमशः ₹ 100 तथा ₹ 80 लाभ प्राप्त करता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए।

2. एक व्यापारी के पास ₹ 6,00,000 हैं। व्यापार चालू करने के लिए वह गाय तथा भैंस खरीदना चाहता है। एक गाय का मूल्य ₹ 20,000 तथा एक भैंस का मूल्य ₹ 60,000 है। वह आदमी प्रत्येक सप्ताह 40 क्विंटल तक पशुओं के लिए चारा एकत्रित कर सकता है। एक गाय प्रति दिन 10 लीटर दूध तथा एक भैंस प्रतिदिन 20 लीटर दूध देती है। गाय के प्रत्येक लीटर दूध पर ₹ 5 लाभ तथा भैंस के प्रत्येक लीटर दूध पर ₹ 7 लाभ होता है। प्रत्येक सप्ताह एक गाय पर एक क्विंटल चारा तथा एक भैंस पर 2 क्विंटल चारा प्रयुक्त होता है। अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए उस व्यक्ति द्वारा खरीदे गए प्रत्येक प्रकार के पशुओं की संख्या ज्ञात करने के लिए रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए। मान लीजिए कि पशुओं से प्राप्त पूरे दूध को वह बेच सकता है।

3. एक कारखाने में दो प्रकार के साबुन बनते हैं जिनमें प्रत्येक दो मशीनों A तथा B से बनता है। पहले प्रकार के साबुन को बनाने के लिए मशीन A दो मिनट तथा मशीन B तीन मिनट चलाई जाती है। दूसरे प्रकार के साबुन को बनाने के लिए मशीन A तीन मिनट तथा मशीन B पाँच मिनट चलाई जाती है। प्रत्येक मशीन एक दिन में अधिक–से–अधिक 8 घंटे चलाई जा सकती है। दोनों प्रकार के साबुन क्रमशः 25 पैसे तथा 50 पैसे के लाभ पर बेचे जाते हैं। मान लीजिए कि निर्माता सभी बने हुए साबुनों को बेच सकता है। कारखाने में प्रतिदिन प्रत्येक प्रकार के कितने साबुन बनाए जाने चाहिएँ, जिससे कि अधिकतम लाभ प्राप्त हो। समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए।

4. दो ऐसी ऋणेतर परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिये, जिनका योग अधिकतम हो यदि उनका अन्तर चार है तथा पहली संख्या के तीन गुने और दूसरी संख्या का योग 9 के बराबर या उससे कम है। समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए।

5. दो विभिन्न प्रकार के आहारों E तथा F में विटामिन A तथा B पाये जाते हैं। आहार E की प्रत्येक इकाई में 2 इकाई विटामिन A तथा 3 इकाई विटामिन B की हैं। आहार F की प्रत्येक इकाई में 4 इकाई विटामिन A तथा 2 इकाई विटामिन B की है। आहार E तथा F की प्रत्येक इकाई का मूल्य क्रमशः 5.00 रुपये तथा 2.50 रुपये है। एक व्यक्ति के लिए प्रत्येक दिन विटामिन A तथा B की क्रमशः न्यूनतम 40 इकाई तथा 50 इकाई की आवश्यकता होती है। मान लीजिए कि विटामिन A तथा B की प्रतिदिन की न्यूनतम आवश्यकता से अधिकता हानिकारक नहीं है। न्यूनतम मूल्य पर आहार E तथा F का उचित मिश्रण ज्ञात कीजिए जिससे विटामिन A तथा B की प्रतिदिन की न्यूनतम आवश्यकता की पूर्ति होती हो। इसे रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए।

6. एक मशीन उत्पादों A तथा B में से प्रत्येक का उत्पादन कर सकती है। A के उत्पादन के लिए 2 इकाई रसायन तथा 1 इकाई यौगिक प्रयुक्त होते हैं और B के उत्पादन के लिए 1 इकाई रसायन तथा 2 इकाई यौगिक प्रयुक्त होते हैं। केवल 800 इकाई रसायन तथा 1000 इकाई यौगिक उपलब्ध हैं। उत्पादों A तथा B की प्रति इकाई पर क्रमशः 30 रुपये तथा 20 रुपये लाभ मिलता है। कुल लाभ को अधिकतम बनाने के लिए A तथा B के बीच इकाइयों का इष्टतम नियतन प्राप्त कीजिए।

7. निम्नलिखित प्रश्नों को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

(a) अधिकतम $z = 25x_1 + 20x_2$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$3x_1 + 6x_2 \le 50$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

(b) अधिकतम $z = 9x_1 + 10x_2$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$11x_1 + 9x_2 \le 9900$$
$$7x_1 + 12x_2 \le 8400$$
$$3x_1 + 8x_2 \le 4800$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

(c) अधिकतम $z = 22x_1 + 18x_2$

निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

$$x_1 + x_2 \le 20,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 48$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 37.1

1. $z = 3x_1 + 8x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये

   निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

   $3x_1 + 4x_2 \le 18$
   $4x_1 + 5x_2 \le 21$
   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. $z = 50x_1 + 15x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये

   निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

   $5x_1 + x_2 \le 100$
   $x_1 + x_2 \le 60$
   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3. $z = 4000x_1 + 7500x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये

   निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

   $4x_1 + 3x_2 \ge 40$
   $2x_1 + 3x_2 \ge 8$
   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

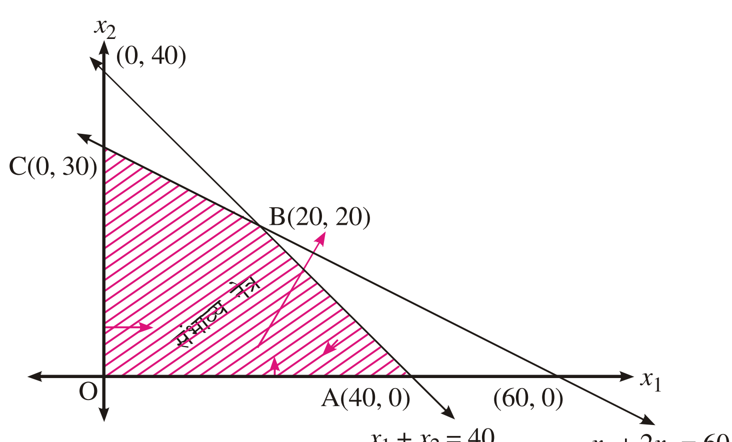
4. $z = 5x_1 + 4x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये

   निम्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

   $1.5x_1 + 2.5x_2 \le 80$
   $2x_1 + 1.5\ x_2 \le 70$
   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

देखें आपने कितना सीखा 37.2

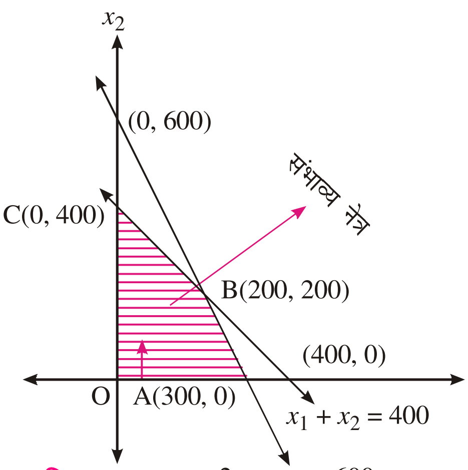
1.



चित्र 37.17

$B(20,20)$ पर अधिकतम $z = 140$

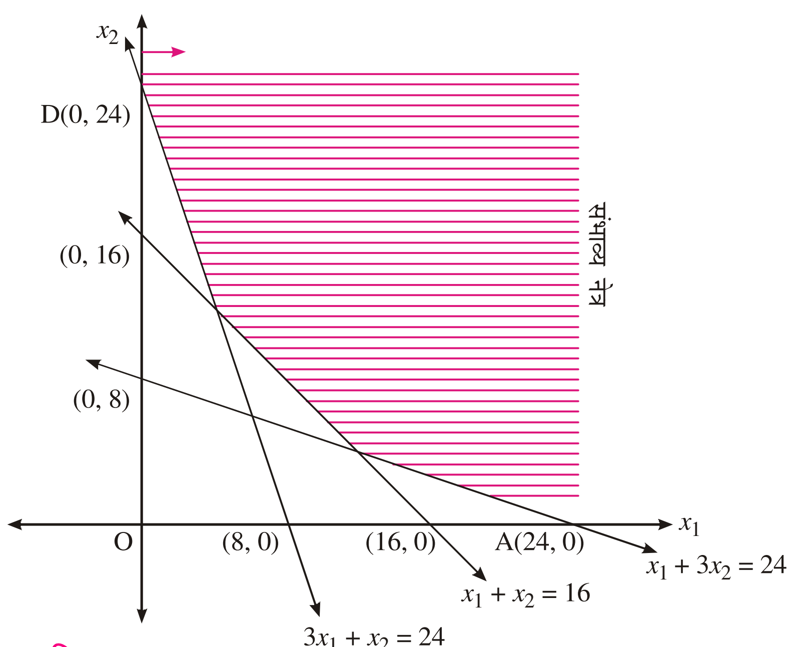
2.



चित्र 37.18

$C(0,400)$ पर अधिकतम $z = 1200$

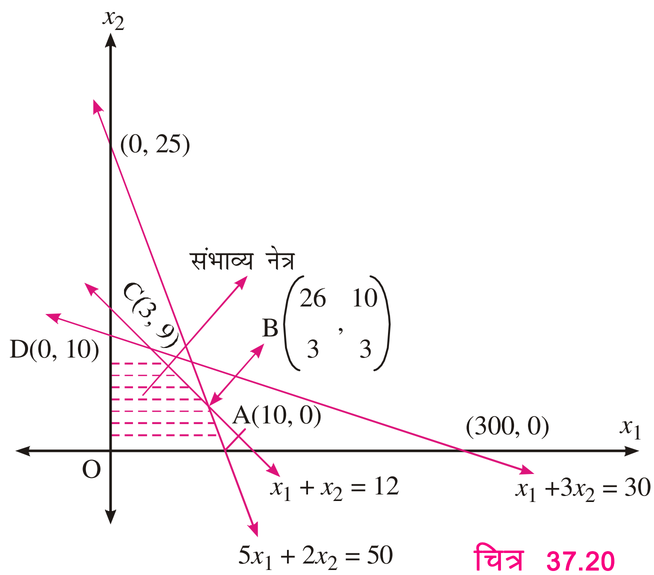
3.



चित्र 37.19

$C(4,12)$ पर न्यूनतम $z = 720$. $x_1 = 4$, $x_2 = 12$

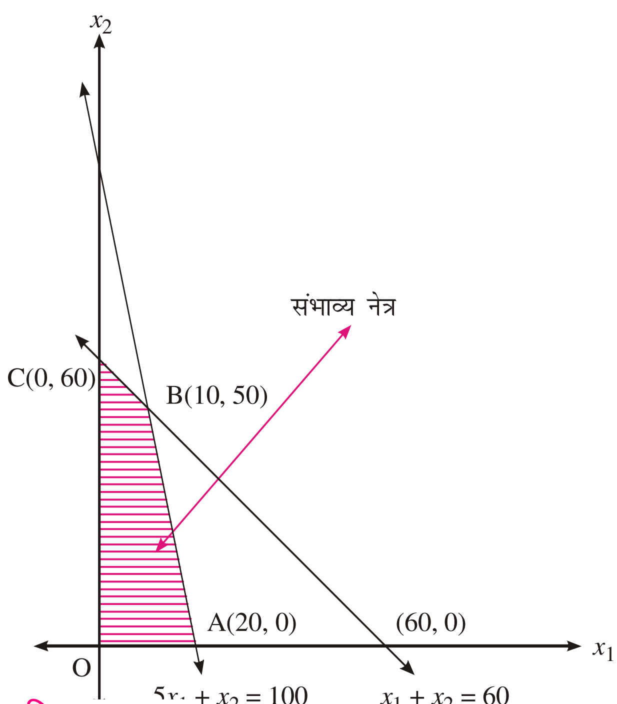
4.



चित्र 37.20

$C(3,9)$ पर अधिकतम $z = 330;\ x_1 = 3,\ x_2 = 9$

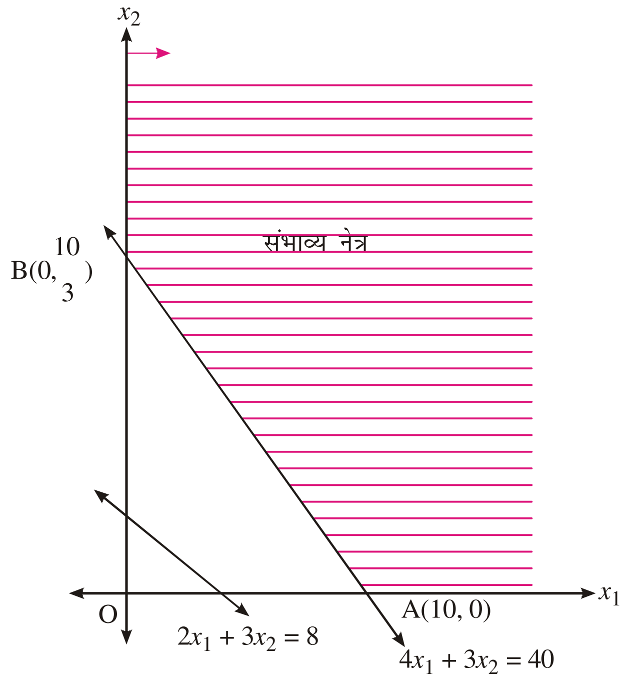
5.



चित्र 37.21

$B(10,50)$ पर अधिकतम $z = 1250\ \ x_1 = 10,\ x_2 = 50$

6.



चित्र 37.22

A (10,0) पर अधिकतम z = 40,000; $x_1 = 10,\ x_2 = 0$

आइए अभ्यास करें

1. $z = 100x_1 + 80x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

   निम्न शर्तों के अन्तर्गत

   $5x_1 + 4x_2 \le 50$
   $x_1 + x_2 \le 10$
   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

2. $z = 150x_1 + 980x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

   निम्न शर्तों के अन्तर्गत

   $x_1 + 3x_2 \le 30$
   $7x_1 + 14x_2 \le 40$
   $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

3. $z = 25x_1 + 50x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$2x_1 + 3x_2 \leq 480$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 480$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

4. $z = x_1 + x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$x_1 - x_2 \geq 4$$
$$3x_1 + x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

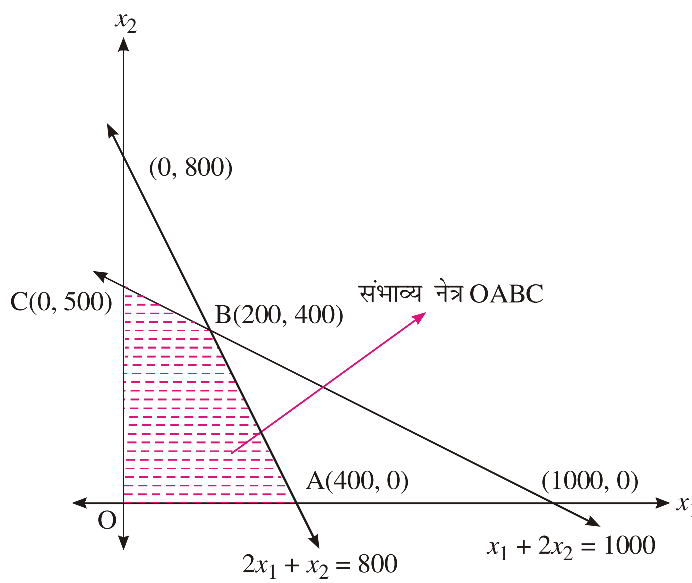
5. $z = 5x_1 + 2.5x_2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए

निम्न शर्तों के अन्तर्गत

$$x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

6. $z = 30x_1 + 20x_2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए
प्रतिबन्धों के अन्तर्गत

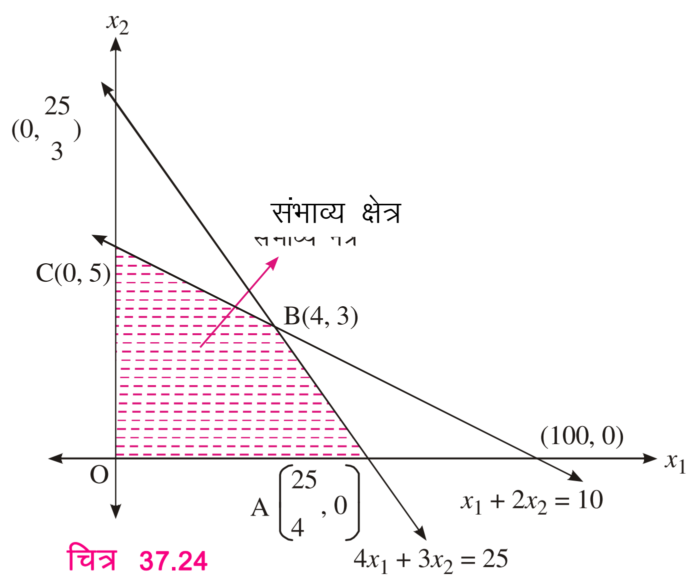
$$2x_1 + x_2 \leq 800$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



चित्र 37.23

B (200, 400) पर अधिकतम $z = 14000;\ x_1 = 200,\ x_2 = 400$

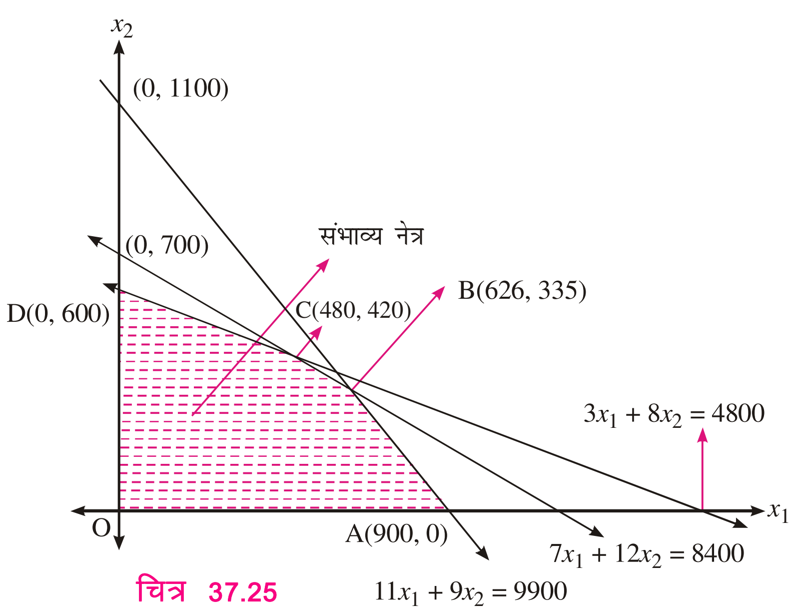
7. (a)



चित्र 37.24

B (4, 3) पर अधिकतम z = 160, $x_1 = 4$ $x_2 = 3$

(b)

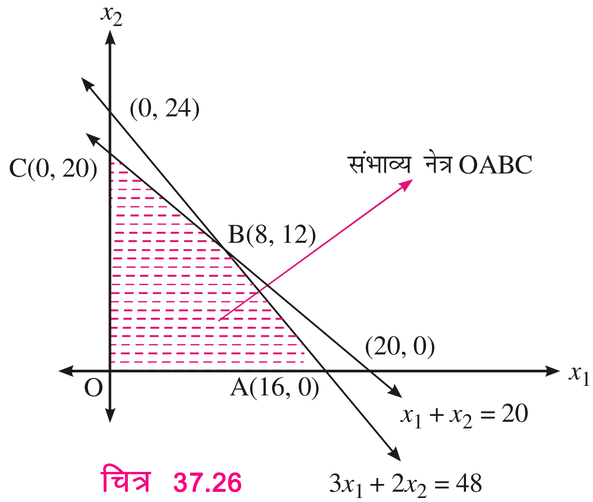


चित्र 37.25

A (900,0) D(0,600) B (626, 335), O(0, 0) तथा C (480, 420)

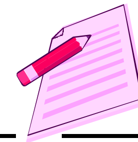
B (626, 335) पर अधिकतम z = 8984; $x_1 = 626$, $x_2 = 335$

(c)



चित्र 37.26

B (8, 12) पर अधिकतम $z = 392, x_1 = 8, x_2 = 12$



38

गणितीय विवेचन

38.1 गणितीय विवेचन

इस अध्याय में हम गणितीय विवेचन से संबंधित कुछ मौलिक धारणाओं को सीखेंगे ओर विवेचन की प्रक्रिया की चर्चा विशेष रूप से गणित के संदर्भ में करेंगे। गणितीय भाषा में विवेचन दो प्रकार के होते हैं (i) आगमनात्मक (आगमिक) विवेचन (ii) निगमनात्मक (निगमनिक) विवेचन

आगमनात्मक विवेचन की चर्चा हम गणितीय आगमन में पहले ही कर चुके हैं। प्रस्तुत अध्याय में हम कुछ मूलभूत निगमनात्मक विवेचन पर चर्चा करेंगे।

38.2 कथन (अथवा साध्य)

गणितीय विवेचन की मौलिक इकाई गणितीय कथन की संकल्पना है।

> एक वाक्य गणितानुसार कथन कहलाता है, यदि वह या तो सत्य है अथवा असत्य है परन्तु दोनों (सत्य एवं असत्य) न हो।

यदि कोई कथन सत्य है, तो वह वैध कथन कहलाता है और असत्य कथन को अमान्य कथन कहते हैं।

1 निम्नलिखित दो वाक्यों पर विचार कीजिए :

3 और 4 का योग 6 है

2 और 3 का योग 5 है।

इन वाक्यों को पढ़कर हम तुरन्त निर्णय कर सकते हैं कि प्रथम वाक्य गलत है और द्वितीय सही है। इनके बारे में कोई भ्रम नहीं है। इस तरह के वाक्यों को गणित में कथन कहते हैं।

1 अब निम्नलिखित वाक्यों पर चर्चा करते हैं :

गणित एक कौतुक है।

जो व्यक्ति गणित को पसन्द करते हैं उनके लिए यह एक कौतुक है जबकि अन्य किसी व्यक्ति के लिए यह असत्य हो सकता है। इसलिए दिया हुआ वाक्य सत्य और असत्य दोनों प्रकार का है। इसलिए यह वाक्य कथन नहीं है।

1 निम्नलिखित वाक्यों की चर्चा करते हैं :

(i) चन्द्रमा, पृथ्वी के इर्द–गिर्द घूमता है।

(ii) प्रत्येक वर्ग आयत होता है।

(iii) सूर्य एक तारा है।

(iv) प्रत्येक आयत एक वर्ग है।

(v) नई दिल्ली पाकिस्तान में है।

इन सभी वाक्यों को पढ़कर हम कह सकते हैं कि प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय वाक्य सत्य हैं। जबकि चौथा और पाँचवा वाक्य असत्य हैं। इसलिए इनमें से प्रत्येक वाक्य एक कथन है।

- निम्नलिखित वाक्यों पर चर्चा करते हैं :

(i) मुझे एक गिलास पानी दीजिए

(ii) बिजली शुरू कर दीजिए

(iii) आप कहां जा रहे हैं?

(iv) आप कैसे हैं?

(v) कितना सुन्दर।

(vi) भगवान् आपको लम्बी आयु प्रदान करें।

(vii) कल बुधवार है।

उपर्युक्त वाक्यों में से किसी की भी सत्यता के विषय में निर्णय नहीं लिया जा सकता, इसलिए ये वाक्य कथन नहीं हैं।

उदाहरण 38.1. जाँचिए कि क्या निम्नलिखित वाक्य कथन हैं? अपने उत्तर के लिए कारण बताइए।

(i) 12, 16 से छोटा है।

(ii) प्रत्येक समुच्चय परिमित होता है।

(iii) $x + 5 = 11$.

(iv) बादलों के बिना कभी भी वर्षा नहीं होती

(v) सभी पूर्णांक प्राकृत संख्याएं भी हैं।

(vi) यहाँ से आगरा कितनी दुरी पर है?

(vii) क्या आप कानपुर जा रहे हैं?

(viii) सभी गुलाब सफेद होते हैं?

हल : (i) यह वाक्य सत्य है क्योंकि $12 < 16$ है इसलिए यह वाक्य एक कथन है।

(ii) यह वाक्य असत्य है क्योंकि सभी समुच्चय परिमित नहीं होते। अतः यह वाक्य एक कथन है।

(iii) $x + 5 = 11$ एक मुक्त वाक्य है। इसकी सत्यता तब तक नहीं जाँची जा सकती जब तक x का मान न दिया हुआ हो। इसलिए यह वाक्य कथन नहीं है।

(iv) यह वैज्ञानिक रूप से प्रमाणित प्राकृतिक तथ्य है कि वर्षा होने से पहले बादल बनते हैं। इसलिए यह वाक्य सदैव सत्य है। इसलिए यह एक कथन है।

(v) यह वाक्य असत्य है क्योंकि सभी पूर्णांक, प्राकृत संख्याएं नहीं होती। इसलिए यह एक कथन है।

(vi) यह प्रश्नवाचक वाक्य हैं। अतः यह कथन नहीं है।

(vii) इस वाक्य के लिए हमारे पास कोई निश्चित उत्तर नहीं हो सकता। इसलिए यह वाक्य कथन नहीं है।

(viii) यह वाक्य असत्य है क्योंकि सभी गुलाब सफेद नहीं होते। अतः यह एक कथन है।

देखें आपने कितना सीखा 38.1

1. निम्नलिखित में से कौन–सा वाक्य कथन है। अपने उत्तर का कारण भी लिखिए।
   (i) आज एक तूफानी दिन है।
   (ii) एक महीने में 40 दिन होते हैं।
   (iii) 6 तथा 8 का योग 12 से बड़ा है।
   (iv) एक संख्या का वर्ग सम संख्या होती है।
   (v) गणित एक कठिन विषय है।
   (vi) सभी वास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएं होती हैं
   (vii) -2 और -5 का गुणनफल -10 है।
   (viii) एक वर्ष में 14 महीने होते हैं।
   (ix) वास्तविक संख्या 4, x से छोटी है।
   (x) मोहन, मेरी बात सुनिए!
   (xi) क्या सभी वृत्त गोल होते हैं?
   (xii) सभी त्रिभुजों की तीन भुजाएं होती हैं।

38.3 किसी कथन का निषेधन

किसी कथन को नकारना उस कथन का निषेधन कहलाता है।

आइए निम्नलिखित कथन की चर्चा करते हैं :

P : नई दिल्ली एक शहर है।

इस कथन का निषेधन निम्नलिखित प्रकार हो सकता है।

यह वस्तु स्थिति नहीं है कि नई दिल्ली एक शहर है

अथवा

यह असत्य है कि नई दिल्ली एक शहर है

अथवा

नई दिल्ली एक शहर नहीं है।

यदि p एक कथन है तो p का निषेधन भी एक कथन है और इसे $\sim p$ से व्यक्त किया जाता है और इसे “p नहीं” पढ़ते हैं।

उदाहरण 38.2. निम्नलिखित कथनों का निषेधन लिखिए।

(i) 2 तथा 3 का योग 6 है।

(ii) $\sqrt{7}$ एक परिमेय सख्या है

(iii) आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप है

(iv) संख्या 8 संख्या 5 से छोटी है

हल : (i) P : 2 तथा 3 का योग 6 है।

$\sim$P : 2 तथा 3 का योग 6 नहीं है।

(ii) q : $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।

$\sim q$: $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

(iii) r : आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप है।

~r : आस्ट्रेलिया एक महाद्वीप नहीं है।

(iv) S : संख्या 8 संख्या 5 से छोटी है।

~S : संख्या 8 संख्या 5 से छोटी नहीं है।

अथवा

यह असत्य है कि संख्या 8 संख्या 5 से छोटी है।

38.4 मिश्र कथन (संयुक्त कथन)

गणितीय विवेचन में, व्यापकतः दो प्रकार के कथन होते हैं।

(1) **साधारण कथनः** ऐसा कथन जिसे दो अथवा अधिक कथनों में विभाजित नहीं किया जा सकता, साधारण कथन कहलाता है। उदाहरण के लिए :

(i) प्रत्येक समुच्चय परिमित होता है।

(ii) नई दिल्ली, भारत की राजधानी है।

(iii) गुलाब सफेद होते हैं।

(iv) $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(v) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय एक अपरिमित समुच्चय है।

(2) **मिश्र कथनः** ऐसा कथन जो दो अथवा अधिक साधारण कथनों के संयोजन से बनता है, मिश्र कथन कहलाता है।

उदाहरण के लिए :

(i) मोहन बहुत चतुर है अथवा वह बहुत भाग्यशाली है। वास्तव में यह कथन दो निम्नलिखित कथनों को "अथवा" संयोजक द्वारा जोड़कर बनाया गया है।

p : मोहन बहुत चतुर है

q : मोहन बहुत भाग्यशाली है

(ii) सूर्य पृथ्वी से बड़ा है और पृथ्वी चाँद से बड़ी है।

यह कथन निम्नलिखित दो कथनों को और संयोजक द्वारा जोड़कर बनाया गया है।

p : सूर्य पृथ्वी से बड़ा है।

q : पृथ्वी चाँद से बड़ी है।

उदाहरण 38.3. निम्नलिखित मिश्र कथनों के घटक कथन ज्ञात कीजिए।

(i) आकाश नीला है और घास हरी है।

(ii) सभी परिमेय संख्याएं वास्तविक संख्याएं हैं और सभी वास्तविक संख्याएं सम्मिश्र संख्याएं हैं।

(iii) वर्षा हो रही है और ठण्ड है।

(iv) $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है अथवा अपरिमेय संख्या है।

हल : (i) घटक कथन निम्नलिखित हैं

p : आकाश नीला है

q : घास हरी है

''और'' संयोजक है।

(ii) p : सभी परिमेय संख्याएं वास्तविक हैं

q : सभी वास्तविक संख्याए सम्मिश्र संख्याएं हैं

घटक कथन हैं तथा संयोजक ''और'' है।

(iii) p : वर्षा हो रही है।

q : ठण्ड है।

घटक कथन है तथा ''और'' संयोजक है।

(iv) p : $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

q : $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

घटक कथन हैं तथा ''अथवा'' संयोजक है।

उदाहरण 38.4. निम्नलिखित मिश्र कथनों के घटक कथन ज्ञात कीजिए।

(i) शून्य एक धनात्मक संख्या है अथवा ऋणात्मक संख्या

(ii) सभी अभाज्य संख्याएं या तो सम है अथवा विषम

(iii) चंडीगढ़ पंजाब और उ.प्र. की राजधानी है।

(iv) संख्या 12, संख्याओं 2, 3 और 4 की गुणज है।

हल : (i) P : 0 एक धनात्मक संख्या है।

q : 0 एक ऋणात्मक संख्या है

घटक कथन हैं तथा ''अथवा'' संयोजक है।

(ii) p : सभी अभाज्य संख्याएं सम संख्याएं हैं।

q : सभी अभाज्य संख्याएं विषम संख्याएं हैं।

घटक कथन हैं तथा ''अथवा'' संयोजक है।

(iii) p : चण्डीगढ़ पंजाब की राजधानी है।

q : चण्डीगढ़ उत्तर प्रदेश की राजधानी है।

घटक कथन हैं तथा ''और'' संयोजक है।

(iv) p : संख्या 12 संख्या 2 का गुणज है।

q : संख्या 12 संख्या 3 का गुणज है।

r : संख्या 12 संख्या 4 का गुणज है।

घटक कथन हैं और तीनों घटक कथन सत्य हैं। यहाँ पर ''और'' संयोजक है।

38.5 अंतर्भाव

इस खण्ड में, हम ''यदि–तो'', ''केवल यदि'' और ''यदि और केवल यदि'' पर विचार–विमर्श करेंगे।

''यदि–तो'' से युक्त कथनों का प्रयोग बहुत सामान्य है। उदाहरण के लिए नीचे लिखें कथनों पर विचार कीजिए :

r : यदि आपका जन्म किसी देश में हुआ है, तो आप उस देश के नागरिक हैं। हम देखते हैं कि यह कथन निम्नलिखित दो कथनों के सदृश है।

p : आपका जन्म किसी देश में हुआ है।

q : आप उस देश के नागरिक हैं।

यदि p तथा q, अंतर्भाव ''यदि p तो q'', को बनाने वाले दो कथन हैं, तो इस अंतर्भाव को "$p \Rightarrow q$" के रूप में व्यक्त किया जाता है।

अंतर्भाव ''यदि p तो q'' को निम्न प्रकार भी समझा जा सकता है।

(i) यदि p और q दोनो सत्य हैं तो

$p \Rightarrow q$ भी सत्य है।

(ii) यदि p सत्य है और q असत्य है, तो

$p \Rightarrow q$ भी असत्य है।

(iii) यदि p असत्य है और q सत्य है, तो

$p \Rightarrow q$ भी सत्य है।

(iv) यदि p और q दोनों असत्य हैं, तो

$p \Rightarrow q$ सत्य है।

निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :

यदि कोई संख्या 9 की गुणज है, तो वह 3 की भी गुणज है यह एक ऐसा अंतर्भाव है जिसका पूर्वपद (p) तथा परपद (q) निम्नलिखित प्रकार हैं :

p : a एक संख्या 9 की गुणज है।

q : a एक संख्या 3 की गुणज है।

उपर्युक्त कथन के अनुसार

(i) p पर्याप्त प्रतिबंध है q के लिए। इसका अर्थ यह हुआ कि यह ज्ञात होना कि संख्या 9 की गुणज है, पर्याप्त है यह निष्कर्ष निकालने के लिए कि वह संख्या 3 की भी गुणज है।

(ii) p केवल यदि q.

इसका अर्थ हुआ कि कोई संख्या 9 की गुणज है, केवल यदि वह संख्या 3 की भी गुणज है।

(iii) 'q अनिवार्य प्रतिबंध है p के लिए'

इसका अर्थ यह हुआ कि जब कोई संख्या 9 की गुणज है, तो वह संख्या अनिवार्य रूप से 3 की भी गुणज है।

(iv) $\sim q$ अंतर्भाव $\sim p$.

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि कोई संख्या 3 की गुणज नहीं है, तो वह संख्या 9 की भी गुणज नहीं है।

38.6 प्रतिधनात्मक और विलोम

प्रतिधनात्मकः यदि p और q दो कथन हैं–तो ''यदि p तो q'' अंतर्भाव का प्रतिधनात्मक ''यदि $\sim q$ तो $\sim p$'' है।

विलोमः यदि p और q दो कथन हैं, तो ''यदि p तो q'' अंतर्भाव का विलोम ''यदि q तो p''.

उदाहरण के लिए :

यदि एक संख्या 9 से विभाजित होती है, तो वह 3 से भी विभाजित होती है।

इसका अंतर्भाव निम्न प्रकार है :

p : संख्या 9 से विभाजित है

q : संख्या 3 से विभाजित है

इस कथन का प्रतिधनात्मक इस प्रकार है :

यदि कोई संख्या 3 से विभाजित नहीं है, तो वह 9 से भी विभाजित नहीं है।

इस कथन का विलोम इस प्रकार है :

यदि कोई संख्या 9 से विभाजित है, तो वह 3 से भी विभाजित है।

38.7 यदि और केवल यदि अंतर्भाव

यदि p और q दो कथन हैं, तो मिश्र कथन $p \Rightarrow q$ तथा $q \Rightarrow p$, यदि और केवल यदि अंतर्भाव कहलाता है ओर इसे $p \Leftrightarrow q$ से व्यक्त करते हैं।

उदाहरण के लिए

एक त्रिभुज समबाहु है यदि और केवल यदि यह समानकोणीय है। यह एक यदि और केवल यदि अंतर्भाव है जिसके घटक कथन इस प्रकार हैं :

p : एक त्रिभुज समबाहु है।

q : एक त्रिभुज समानकोणीय है।

उदाहरण 38.5. निम्नलिखित कथनों को ''यदि तो'' के रूप में लिखिए।

(i) आपको नौकरी मिलने का तात्पर्य हैं आपका प्रत्यय–पत्र अच्छा है।

(ii) केले के पेड में अच्छे फूल लगेंगे यदि वातावरण एक माह तक गरम बना रहे।

(iii) एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज हैं यदि उसके विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

हल : (i) हम जानते हैं कि ''यदि p तो q'', "$p \Rightarrow q$" के समतुल्य है। इसलिए दिया हुआ कथन इस प्रकार लिखा जा सकता है।

''यदि आपको नौकरी मिलती है, तो आपका प्रत्यय–पत्र अच्छा है।''

(ii) हम जानते हैं कि ''यदि p तो q'', "$p \Rightarrow q$" के समतुल्य है। इसलिए दिया हुआ कथन निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

''यदि एक महीने तक गरम मौसम रहता है, तो केले के पेड़ों में अच्छे फूल लगेंगे।''

(iii) दिया हुआ कथन इस प्रकार लिखा जा सकता है :

''यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं, तो यह एक समान्तर चतुर्भुज है।''

उदाहरण 38.6. निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक लिखिए :

(i) यदि एक त्रिभुज समबाहु है, तो यह समद्विबाहु है।

(ii) यदि आपका जन्म भारत में हुआ है, तो आप भारत के नागरिक हैं।

(iii) यदि x सम संख्या है, तो इसका तात्पर्य है कि x, 4 से विभाजित होती है।

हल : इन कथनों के प्रतिधनात्मक इस प्रकार हैं :

(i) यदि एक त्रिभुज समद्विबाहु नहीं है, तो वह समबाहु नहीं है।

(ii) यदि आप भारत के नागरिक नहीं है, तो आपका जन्म भारत में नहीं हुआ है।

(iii) यदि x, 4 से विभाजित नहीं होता है, तो x एक सम संख्या नहीं है।

उदाहरण 38.7. निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए :

(i) यदि एक संख्या n, सम संख्या है, तो n^2 सम संख्या है।

(ii) यदि x एक सम संख्या है, तो x, 4 से विभाजित होता है।

हल : इन कथनों के विलोम इस प्रकार हैं :

(i) यदि n^2 एक सम संख्या है, तो n एक सम संख्या है।

(ii) यदि x, 4 से विभाजित होता है, तो x सम संख्या है।

उदाहरण 38.8. नीचे कथनों के दो युग्म दिए हुए है। ''यदि और केवल यदि'' की सहायता से प्रत्येक युग्म के कथनों को जोड़िए।

(i) p : यदि एक आयत वर्ग है, तो इसकी चारों भुजाएं समान होती हैं।

q : यदि आयत की चारों भुजाएं समान हैं, तो आयत एक वर्ग होता है।

(ii) p : यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाजित होता है, तो वह संख्या 3 से विभाजित होती है।

q : यदि एक संख्या 3 से विभाजित है, तो उस संख्या के अंकों का योग भी 3 से विभाजित है।

हल : (i) एक आयत वर्ग है यदि और केवल यदि उसकी चारों भुजाओं की लम्बाई समान है।

(ii) एक संख्या 3 से विभाजित है यदि और केवल यदि उसके अंकों का योगफल 3 से विभाजित है।

देखें आपने कितना सीखा 38.2

1. निम्नलिखित कथन को ''यदि–तो'' के प्रयोग से पाँच विभिन्न रूपों में इस प्रकार लिखिए कि प्रत्येक रूप का अर्थ एक जैसा हो।

   यदि एक प्राकृत संख्या विषम है, तो इसका वर्ग भी विषम है।

2. निम्नलिखित कथनों का प्रतिधनात्मक और विलोम लिखिए :

   (i) यदि आप कानपुर में रहते हैं, तो आपके पास सर्दी के कपड़े हैं।

   (ii) यदि x एक अभाज्य संख्या है, तो x विषम संख्या है।

   (iii) यदि दो रेखाएं समान्तर है, तो वे एक ही तल में प्रतिच्छेद नहीं करती।

   (iv) x सम संख्या होने का तात्पर्य है कि x; 4 से विभाजित है।

   (v) ठंड होने का तात्पर्य है कि तापमान कम है।

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ''यदि–तो'' के रूप में लिखिए :
   (i) कक्षा में A^+ प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि आप पुस्तक की प्रश्नावलियों के सभी प्रश्नों को हल कर लें।
   (ii) खेल तभी रद्द होगा यदि वर्षा हो रही है।
   (iii) जब ठंड होती है तो कभी वर्षा नहीं होती।
4. निम्नलिखित कथनों को ''यदि और केवल यदि'' के रूप में लिखिए :
   (i) यदि आप टेलीविजन देखते हैं आपका दिमाग स्वतंत्र है और यदि आपका दिमाग स्वतंत्र है तो आप टेलीविजन देखते हैं।
   (ii) आपको A ग्रेड प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक एवं पर्याप्त है कि अपना गृहकार्य नियमित रूप से करें।

38.8 कथनों की वैधता को प्रमाणित करना

इस अनुच्छेद में हम कथनों की वैधता की चर्चा करेंगे। कथन की वैधता जाँचने से अभिप्राय है कि कथन कब सत्य है और कब असत्य है। इस प्रश्न का उत्तर इस बात पर निर्भर करता है कि प्रदत्त–कथन में ''और'' तथा 'या' में से संयोजक शब्द का अथवा ''यदि और केवल यदि'' तथा ''यदि–तो'' में से किस प्रतिबंध का अथवा ''प्रत्येक के लिए'' तथा ''एक ऐसा का अस्तित्व है'' में से किस परिणामवाचक वाक्यांश का प्रयोग किया गया है।

यहाँ हम किसी कथन की वैधता ज्ञात करने के लिए कुछ तकनीकों अथवा नियमों की चर्चा करेंगे।

नियम 1: ''और'' सहित कथन

यदि p और q गणितीय कथन हैं, तो यह दर्शाने के लिए कि कथन "p और q" सत्य है हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण करते हैं।

चरण 1 : दर्शाइए कि कथन p सत्य है।

चरण 2 : दर्शाइए कि कथन q सत्य है।

नियम 2: ''अथवा'' सहित कथन

यदि p और q गणितीय कथन हैं, तो यह दर्शाने के लिए कि कथन "p अथवा q" सत्य है, हम निम्नलिखित स्थितियों में से किसी एक को सत्य प्रमाणित करते हैं।

स्थिति 1 : हम मानते हुए कि p असत्य है, q को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

स्थिति 2 : हम मानते हुए कि q असत्य है, p को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

नियम 3: ''यदि–तो'' सहित कथनों की वैधता

यदि p और q दो गणितीय कथन हैं, तो यह सिद्ध करने के लिए कि कथन ''यदि p तो q" सत्य है हम निम्नलिखित स्थितियों में से किसी एक को सत्य प्रमाणित करते हैं।

स्थिति 1 : प्रत्यय विधि :

यह मानते हुए कि p सत्य है, q को अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

स्थिति 2 : प्रतिधनात्मक विधि :

यह मानते हुए कि q असत्य है, p को भी अनिवार्यतः सत्य प्रमाणित कीजिए।

नियम 4: ''यदि और केवल यदि'' सहित कथन :

कथन "p यदि और केवल यदि q" को सत्य सिद्ध करने के लिए हमें यह प्रमाणित करने की आवश्यकता है कि

(i) यदि p सत्य हो तो q सत्य है।

(ii) यदि q सत्य है तो p सत्य है।

उदाहरण 38.9. यदि p और q दो कथन इस प्रकार हैं कि

p : 35, 5 का गुणज है

q : 35, 6 का गुणज है

इन दो कथनों को ''और'' संयोजक से जोड़कर मिश्र कथन लिखिए और वैद्यता की जाँच कीजिए।

हल : मिश्र कथन इस प्रकार है : "35, 5 और 6 दोनों का गुणज है'' क्योंकि 35, 5 का गुणज है और 6 का गुणज नहीं है। इसलिए p सत्य है लेकिन q असत्य है। इसलिए मिश्र कथन वैध नहीं है।

उदाहरण 38.10. यदि p और q दो कथन इस प्रकार हैं कि

p : 35, 5 का गुणज है।

q : 35, 6 का गुणज है।

इन दो कथनों को ''अथवा'' संयोजक से जोड़कर एक मिश्र कथन लिखिए और वैद्यता की जाँच कीजिए।

हल : मिश्र कथन इस प्रकार है : "35, 5 अथवा 6 का गुणज है।''

यह मानते हुए कि कथन q असत्य है, तो p सत्य है

मिश्र कथन सत्य है अर्थात वैध है।

उदाहरण 38.11. जाँच कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा नहीं।

''यदि x और y विषम पूर्णांक हैं, तो xy एक विषम पूर्णांक है।

हल : मान लीजिए कथन p और q निम्न प्रकार हैं

p : x और y विषम पूर्णांक हैं।

q : xy एक विषम पूर्णांक है, तो दिया हुआ कथन

''यदि p तो q'' के जैसा है।

प्रत्यक्ष विधि : p सत्य है, तो p सत्य है।

$\Rightarrow$ x और y विषम संख्याएं हैं

$\Rightarrow$ $x = 2m + 1, y = 2n + 1$, पूर्णांक m, n के लिए

$\Rightarrow$ $xy = (2m + 1)\ (2n + 1)$

$\Rightarrow$ $xy = 2\ (2mn + m + n) + 1$

$\Rightarrow$ xy एक विषम पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ q सत्य है।

इस प्रकार, p सत्य है $\Rightarrow q$ सत्य है

अतः "यदि p, तो q" एक सत्य कथन है।

38.8.1 प्रतिधनात्मक विधि

मान लीजिए q सत्य नहीं है, तो q सत्य नहीं है।

$\Rightarrow$ xy एक सम संख्या है

$\Rightarrow$ x सम संख्या है अथवा y सम संख्या है अथवा x और y दोनो सम संख्या है।

$\Rightarrow$ p सत्य नहीं है।

इस प्रकार q असत्य $\Rightarrow p$ असत्य है

अतः ''यदि p-तो q" एक सत्य कथन है।

38.8.2 विरोधोक्ति द्वारा कथनों की वैधता

इस विधि में यह सिद्ध करने के लिए कोई कथन p सत्य है हम यह मान लेते हैं कि p सत्य नहीं है अर्थात $\sim p$ सत्य है। इस प्रकार हम एक ऐसे निष्कर्ष पर पहुंचते है जो हमारी मान्यता का खंडन करता है। परिणामतः p को सत्य होना चाहिए।

उदाहरण 38.12. विरोधोक्ति द्वारा निम्नलिखित कथन को सत्यापित कीजिए :

p : $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लीजिए एक कथन p इस प्रकार है :

p : $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हम मान लेते हैं कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \quad \sqrt{7} = \dfrac{a}{b}$ जहाँ a और b ऐसे पूर्णांक हैं जिनका कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

$\Rightarrow \quad 7 = \dfrac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \quad a^2 = 7b^2$

$\Rightarrow \quad 7$, a^2 को विभाजित करता है।

$\Rightarrow \quad 7$, a को विभाजित करता है।

$\Rightarrow \quad a = 7c$ किसी पूर्णांक c के लिए

$\Rightarrow \quad a^2 = 49c^2$

$\Rightarrow \quad 7b^2 = 49c^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = 7c^2$

$\Rightarrow \quad 7$, b^2 को विभाजित करता है।

$\Rightarrow \quad 7$, b को विभाजित करता है।

अतः 7, a तथा b का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। यह इस बात का खंडन करता है कि a और b का कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है। अतः हमारी यह मान्यता गलत है कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है। अतः कथन "$\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है" सत्य है।

देखें आपने कितना सीखा 38.3

1. निम्नलिखित कथनों की वैधता की जाँच कीजिए :

   (i) p : 80, 4 तथा 5 का गुणज है।

   (ii) q : 115, 5 तथा 7 का गुणज है।

   (iii) r : 60, 2 तथा 3 का गुणज है।

2. (i) प्रत्यक्ष विधि (ii) विरोधोक्ति विधि (iii) प्रतिधनात्मक विधि से दर्शाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है :

   p : "एक वास्तविक संख्या x इस प्रकार है कि

   $x^3 + 2x = 0$, तो x का मान 0 है।"

3. प्रतिधनात्मक विधि से दर्शाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है :

   p : "यदि x एक पूर्णांक है और x^2 विषम है, तो x भी विषम है"

4. दर्शाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है :

   "पूर्णांक x सम है यदि और केवल यदि x^2 सम है"

5. निम्नलिखित कथनों में कौन–सा कथन सत्य है और कौन–सा कथन असत्य है। प्रत्येक के लिए अपने उत्तर की वैधता के लिए उचित कारण बताइए।

   (i) p : वृत्त की प्रत्येक त्रिज्या उसकी जीवा होती है।

   (ii) q : किसी वृत्त का केन्द्र वृत्त की प्रत्येक जीवा को समद्विभाजित करता है।

   (iii) r : एक वृत्त, किसी दीर्घवृत्त की एक विशेष स्थिति है।

   (iv) s : यदि x और y ऐसे पूर्णांक हैं कि $x > y$, तो $-x < -y$.

   (v) t : $\sqrt{11}$ एक परिमेय संख्या है।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.cs.odu.edu/~toida/nerzic/content/set/math_reasoning.html*
- *http://www.freencertsolutions.com/mathematical-reasoning*
- *www.basic-mathematics.com/examples-of-inductive-reasoning.html*

आइए अभ्यास करें

1. ऐसे चार वाक्य लिखिए जो कथन नहीं है।

2. क्या कथनों के निम्नलिखित युग्म एक दूसरे के निषेधन हैं?

   (i) संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है।

   संख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

   (ii) संख्या x एक परिमेय संख्या है।

   संख्या x एक अपरिमेय संख्या है।

3. निम्नलिखित कथनों के प्रतिधनात्मक एवं विलोम लिखिए :

   (i) यदि दो रेखाएं समान्तर हैं, तो वे एक ही तल में प्रतिच्छेद नहीं करती।

   (ii) यदि x एक अभाज्य संख्या है, तो x विषम है।

4. प्रत्युदाहरण द्वारा सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य नहीं हैं

   (i) p : यदि किसी त्रिभुज के सभी कोण समान है, तो त्रिभुज एक अधिक कोण त्रिभुज है।

(ii) q : समीकरण $x^2 - 1 = 0$ के मूल 0 और 2 के बीच स्थित नहीं है।

5. मान लीजिए, p : 25, 5 का गुणज है।

   q : 25, 8 का गुणज है। दो कथन हैं।

   संयोजक ''और'' तथा ''अथवा'' द्वारा मिश्र कथन लिखिए। दोनों दशाओं में प्राप्त मिश्र कथनों की वैधता जाँचिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 38.1

1. (i), (ii), (iii), (iv), (vi), (vii), (viii), (xii) कथन हैं।

देखें आपने कितना सीखा 38.2

1. (i) $p \Rightarrow q$ i.e., n एक विषम प्राकृत संख्या है $\Rightarrow x^2$ एक विषम प्राकृत संख्या है।

   (ii) p, q के लिए पर्याप्त प्रतिबंध है।

   (iii) p केवल यदि q i.e एक प्राकृत संख्या विषम है केवल यदि उसका वर्ग विषम है।

   (iv) q, p का आवश्यक प्रतिबंध है।

   (v) $\sim q \Rightarrow \sim p$ i.e. यदि किसी प्राकृत संख्या का वर्ग विषम नहीं है, तो प्राकृत संख्या विषम नहीं है।

2. (i) प्रतिधनात्मक : यदि आपके पास सर्दी के कपड़े नहीं हैं, तो आप कानपुर में नहीं रहते हैं।

   विलोम : यदि आपके पास सर्दी के कपड़े हैं, तो आप कानपुर में रहते हैं।

   (ii) प्रतिधनात्मक : यदि एक संख्या x विषम नहीं है, तो x अभाज्य नहीं है।

   विलोम : यदि एक संख्या x विषम है, तो x अभाज्य संख्या है।

   (iii) प्रतिधनात्मक : यदि दो रेखाएं परस्पर एक ही समतल में प्रतिच्छेद नहीं करतीं, तो वे समान्तर नहीं हैं।

   विलोम : यदि दो रेखाएं एक ही समतल के परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करती, तो वे समान्तर हैं।

   (iv) प्रतिधनात्मक : यदि x, 4 से विभाजित नहीं होता, तो x एक सम संख्या नहीं है।

   विलोम : यदि x, 4 से विभाजित है, तो x एक सम संख्या है।

   (v) प्रतिधनात्मक : यदि किसी वस्तु का तापमान कम नहीं है, तो वह वस्तु ठंडी नहीं है।

   विलोम : यदि किसी वस्तु का तापमान कम है, तो वस्तु ठंडी है।

3. (i) ''यदि आप कक्षा में A^+ प्राप्त करते हैं, तो आप पुस्तक के सभी प्रश्नों को हल करते हैं।''

   (ii) यदि वर्षा हो रही है तो खेल रद्द है।

   (iii) यदि ठंड है तो वर्षा नहीं होती।

4. (i) आप टेलीविजन देखते हैं यदि और केवल यदि आपका दिमाग स्वतंत्र है।
   (ii) आपको A ग्रेड मिलता है यदि और केवल यदि आप सम्पूर्ण गृहकार्य नियमित रूप से करते हैं।

देखें आपने कितना सीखा 38.3

1. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य
5. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य

आइए अभ्यास करें

1. (i) इस कमरे में प्रत्येक व्यक्ति गंजा है
   (ii) "$\cos^2\theta$ का मान सदैव $\frac{1}{2}$ से बड़ा होता है।
   (iii) गणित मुशिकल है।
   (iv) सोहन, मेरी बात सुनिए।
2. (i) हाँ (ii) हाँ
3. (i) प्रतिधनात्मक : यदि दो रेखाएं एक ही समतल में परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो वे समान्तर नहीं है।
   विलोम : यदि दो रेखाएं एक ही तल में प्रतिच्छेद नहीं करतीं, तो वे समान्तर हैं।
   (ii) प्रतिधनात्मक : यदि एक संख्या x विषम नहीं है, तो x एक अभाज्य संख्या नहीं है।
   विलोम : यदि एक संख्या x विषम है तो यह अभाज्य संख्या है।
5. ''और'' सहित मिश्र कथन : 25, 5 तथा 8 का गुणज है। यह एक असत्य कथन है।
   ''अथवा'' सहित मिश्र कथन : 25, 5 अथवा 8 का गुणज है। यह एक सत्य कथन है।

प्रश्न पत्र का प्रारूप

विषय: गणित (311)

उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम

अधिकतम अंक: 100 ***समय: 3 घंटे***

1. उद्देश्यों के आधार पर भारिता

क्रम संख्या	उद्देश्य	अंक	कुल अंको का प्रतिशत
1.	ज्ञान	30	30%
2.	बोध	40	40%
3.	अनुप्रयोग	22	22%
4.	कौशल	08	8%

2. मॉडयूलवार समय एवं अंक वितरण

क्रम संख्या	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक	अनुमानित समय (मिनटों में)
1.	दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (6 अंकीय प्रश्न)	5	30	$5 \times 10 = 50$
2.	लघु उत्तरीय प्रश्न (4 अंकीय प्रश्न)	12	48	$12 \times 6 = 72$
3.	अतिलघु उत्तरीय प्रश्न (2 अंकीय प्रश्न)	6	12	$6 \times 3 = 18$
4.	बहुविकल्पीय प्रश्न (1 अंकीय प्रश्न)	10	10	$10 \times 2 = 20$
	कुल	**33**	**100**	**160 मिनट**

** दोहराने के लिए 20 मिनट निर्धारित हैं।*

3. विषय वस्तु के आधार पर भारिता

क्रम संख्या	मॉडयूल का नाम	पाठ की संख्या	अंक
1.	बीजगणित -II	03	17
2.	संबंध एवं फलन -II	02	12
3.	कलन	08	45
4.	सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति	04	17
5.	रैखिक प्रोग्रामन एवं गणितीय विवेचन	02	09
	कुल	**19**	**100**

4. प्रश्नों की कठिनाई के स्तर के आधार पर भारिता

अनुमानित स्तर	अंक	अंकों का प्रतिशत
कठिन	20	20
औसत	50	50
आसान	30	30
कुल	**100**	**100**

नमूना प्रश्न प्रत्र
गणित (311)

अधिकतम अंक: 100 | ***समय: 3 घंटे***

निर्देश:

- इस प्रश्न पत्र में कुल 33 प्रश्न हैं, जो चार खण्डों A, B, C तथा D में विभाजित हैं।
- खण्ड A में 1 से लेकर 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं। जिनमें से प्रत्येक के लिए 1 अंक निर्धारित है। प्रत्येक प्रश्न में उत्तर के रूप में A, B, C तथा D चार विकल्प दिए हैं जिनमें से कोई एक सही है। आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी उत्तर पुस्तिका में A, B, C तथा D में जो सही हो उत्तर के रूप में लिखना है।
- खण्ड B में प्रश्न संख्या 11 से 16 तक अति लघुउत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 2 अंक निर्धारित हैं।
- खण्ड C में प्रश्न संख्या 17 से 28 तक लघुउत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 4 अंक निर्धारित हैं।
- खण्ड D में प्रश्न संख्या 29 से 33 तक दीर्घउत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 6 अंक निर्धारित हैं।
- सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं है फिर भी कुछ प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।

खण्ड – A

1. यदि A एक 3×3 क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब $|KA|$ बराबर होगा:

   (a) $K|A|$ (b) $3.K|A|$ (c) $K^2|A|$ (d) $K^3|A|$

2. यदि $\tan^{-1} x = y, x \in R,$ तब

   (a) $0 \le y \le \pi$ (b) $0 < y < \pi$ (c) $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ (d) $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

3. मूल बिन्दु से समतल $\bar{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 3$ की दूरी है:

   (a) 3 (b) $\sqrt{3}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (d) 0

4. निम्न में से कौन सा वाक्य कथन नहीं है:

   (a) 5, 12 से बड़ा है। (b) प्रत्येक समुच्चय एक परमित होता है।
   (c) सूर्य एक तारा है। (d) यहाँ से आगरा कितनी दूर है?

5. यदि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ पर संबंध $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ परिभाषित है, तब:

   (a) R स्वतुल्य तथा सममित है परन्तु संक्रमक नहीं। (b) R सममित एवं संक्रमक है परन्तु स्वतुल्य नहीं।
   (c) R स्वतुल्य एवं संक्रमक है परन्तु सममित नहीं। (d) R एक तुल्यता संबंध है।

6. x के मान, जिनके लिए, फलन $f(x) = |x| + |x + 5| + |x - 6|$, अवकलित नहीं है, है:

   (a) 0, 5, 6 (b) 0, –5, –6 (c) 0, –5, 6 (d) 0, 5, –6

7. यदि $y = \log (x \cdot e^x)$, तब $\dfrac{dy}{dx}$ का मान है:

(a) $\frac{x+1}{x}$ (b) $\frac{x+1}{x\cdot e^x}$ (c) $e^x(x+1)$ (d) $\frac{1}{x\cdot e^x}$

8. यदि $\int e^x(\text{cosec}^2 x - \cot x)dx = \text{P}\cdot e^x + c$, तब P का मान है:

(a) $\text{cosec}^2 x$ (b) $\cot x$ (c) $-\cot x$ (d) $\text{cosec}\, x\cdot\cot x$

9. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| dx$ का मान है:

(a) -2 (b) 0 (c) 1 (d) 2

10. अवकलन समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 4y = 0$ की डिग्री है:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) परिभाषित नहीं

खण्ड-B

11. यदि $X+Y=\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & 9\end{bmatrix}$ तथा $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 6\\0 & -1\end{bmatrix}$, तब X तथा Y का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक 2×2 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके i^{th} पंक्ति एवं j^{th} स्तम्भ का मान $a_{ij} = \frac{3i-j}{2}$ है।

12. यदि $f: \text{R} \to \text{R}$ तथा $g: \text{R} \to \text{R}$ फलन $f(x) = x+1$ तथा $g(x) = x-1$, पर परिभाषित है तब दिखाइए कि $fog = gof$

13. मान ज्ञात कीजिए:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

14. यदि $y = \sin^{-1} x$, तब दिखाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$

15. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी आसन्न भुजाएं $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ तथा $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ हैं।

16. जांच कीजिए कि निम्न कथन सत्य है या असत्य।

"यदि $x, y \in Z$ इस प्रकार हैं कि x तथा y विषम हैं, तब xy भी विषम है।"

खण्ड-C

17. नीचे दिए गए आव्यूह को सममित आव्यूह एवं विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\-6 & 8 & 3\\-4 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

18. यदि $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ है, तब निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\vec{a}+\vec{b}$ (ii) $\vec{a}-\vec{b}$

(iii) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$ (iv) $\vec{a}+\vec{b}$ तथा $\vec{a}-\vec{b}$ के बीच कोण

19. सारणिक के गुणों का उपयोग करके सिद्ध कीजिए:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A^2 + kA - 5I = 0$, जहां k एक वास्तविक संख्या है, तब k का मान ज्ञात कीजिए।

20. सिद्ध कीजिए: $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$

21. यदि $f: R \to R$ फलन $f(x) = 4x + 3$ पर परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि फलन f एकैकी एवं आच्छादक है। फलन f का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए।

22. a तथा b के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{यदि} \quad x \le 2 \\ ax+b & \text{यदि} \quad 2 < x < 10 \\ 21 & \text{यदि} \quad x \ge 10 \end{cases}$$ एक सतत फलन है।

23. यदि $y = x^{\cos x} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$, तब $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

24. उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए दिया गया फलन $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$, (i) आरोही या वर्धमान है (ii) अवरोही या ह्रासमान हैं।

अथवा

$x = 3$ पर वक्र $y = x^2 + 4x + 1$ के लिए स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। वह बिन्दु भी कीजिए जहां वक्र की स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है।

25. मान ज्ञात कीजिए: $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} dx$

26. दी गई अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$(x-y)\frac{dy}{dx} = x + 3y$$

27. सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ का सदिशों $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ तथा $\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ के योग के सापेक्ष इकाई सदिश के गुणनफल का परिमाण $2\sqrt{26}$ के बराबर है तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

28. मान ज्ञात कीजिए:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2x-3)}}$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए:

$$\int \frac{3x+2}{(x-1)(2x+3)}dx$$

खण्ड-D

29. आव्यूह विधि का प्रयोग करके निम्न रैखिक समीकरणों के निकाय को हल कीजिए।

$x - y + 2z = 7, \quad 3x + 4y - 5z = -5, \quad 2x - y + 3z = 12$

अथवा

प्रारंभिक स्थानांतरण विधि (Elementary Transformation Method) का प्रयोग करके आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

30. दर्शाइए कि एक वृत्त के अन्तर्गत जितने भी आयत बनाए जा सकते हैं, उनमें वर्ग का क्षेत्रफल अधिकतम होता है।

अथवा

45 सेमी. × 24 सेमी. आयताकार टीन की शीट के कोनों में से वर्गाकार टुकड़े काटकर शेष भुजाओं को इस प्रकार मोड़ा गया है कि एक खुला बक्सा बन जाए। काटे गए वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए ताकि बक्से का आयतन अधिकतम हो।

31. समाकलन का प्रयोग करके, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

32. बिन्दु (1, 2, –4) से गुजरने वाली तथा रेखाओं $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{6}$ एवं $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-5}{1}$ के समांतर समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

33. एक उत्पाद कम्पनी नट एवं बोल्ट का उत्पादन करती है। कंपनी 1 घंटा मशीन A तथा 3 घंटा मशीन B के साथ कार्य करने पर नट का एक पैकेज का उत्पादन करती है। कंपनी 3 घंटा मशीन A तथा 1 घंटा मशीन B के साथ कार्य करने पर बोल्ट का एक पैकेज उत्पादन करती है। कंपनी नट के एक पैकेज पर ₹20 तथा बोल्ट के एक पैकेज पर ₹10 का लाभ कमाती है। एक दिन में 12 घंटे के लिए दोनों मशीनों का चलाकर प्रत्येक के कितने पैकेजों का उत्पादन प्रतिदिन किया जाए ताकि लाभ अधिकतम हो। उपरोक्त से एक रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या का निर्माण कीजिए तथा आलेखन विधि द्वारा हल कीजिए।

अंक निर्धारण योजना (Marking Scheme)

प्रश्न सं.	Value Points	अंक वितरण	कुल अंक
1	D		1
2	D		1
3	B		1
4	D		1
5	C		1
6	C		1
7	A		1
8	C		1
9	D		1
10	B		1
11	$X = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ or $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 5/2 & 2 \end{bmatrix}$	1 1 प्रत्येक सही अवयव के लिए $\frac{1}{2}$ अंक	2
12	$\text{fog}(x) = f(g(x)) = f(x-1) = x-1+1 = x$ $\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(x+1) = x+1-1 = x$	1 1	2
13	$\lim\limits_{x \to 10} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ $= \lim\limits_{x \to 10} \frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim\limits_{x \to 10} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ $= \frac{2}{1+1} = 1$	$\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$	2

14.	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-1/2}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}(-2x)$ $=\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$	1 1	 2
15.	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $=-22\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=\sqrt{(-22)^2+(-1)^2+(8)^2}$ $=\sqrt{549}=3\sqrt{61}$ $\therefore$ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=3\sqrt{61}$ वर्ग इकाई	 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	 2
16.	मान लीजिए p: x . y $\in$ Z इस प्रकार हैं कि x तथा y विषम है। q: xy विषम हैं। मान लीजिए कि यदि p सत्य हैं, तो q भी सत्य है। p सत्य होने का तात्पर्य है मान लीजिए x = 2m + 1, y = 2n + 1 जहां m, n पूर्णांक हैं। $\therefore \quad xy=(2m+1)(2n+1)$ $=2(2mn+m+n)+1$ यह दर्शाता है कि xy विषम है i.e., q सत्य है।	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1	 2
17.	मान लीजिए $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & 3 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad A'=\begin{bmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $A+A'=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 16 & 9 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$	1 $\frac{1}{2}$	

	$$\frac{A+A^1}{2}=\begin{bmatrix}1 & -3/2 & 1/2\\ -3/2 & 8 & 9/2\\ 1/2 & 9/2 & 5\end{bmatrix}$$	$\frac{1}{2}$	
	$$A-A^1=\begin{bmatrix}0 & 9 & 9\\ -9 & 0 & -3\\ -9 & 3 & 0\end{bmatrix}$$	$\frac{1}{2}$	
	$$\frac{A-A^1}{2}=\begin{bmatrix}0 & 9/2 & 9/2\\ -9/2 & 0 & -3/2\\ -9/2 & 3/2 & 0\end{bmatrix}$$	$\frac{1}{2}$	
	हम जानते हैं कि $\frac{A+A^1}{2}$ सममित है तथा $\frac{A-A^1}{2}$ प्रतिसमित है।	$\frac{1}{2}$	
	$$\therefore A=\begin{bmatrix}1 & -3/2 & 1/2\\ -3/2 & 8 & 9/2\\ 1/2 & 9/2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 9/2 & 9/2\\ -9/2 & 0 & -3/2\\ -9/2 & 3/2 & 0\end{bmatrix}$$	$\frac{1}{2}$	4
18.	(i) $\vec{a}+\vec{b}=4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}.$	1	
	(ii) $\vec{a}+\vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$	1	
	(iii) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=-8+3+5=0$	1	
	(iv) $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0$		
	$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ पर लम्बवत् है।	1	4
19.	बायाँ पक्ष $=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$		
	$R_1 \to R_1 - R_2$ & $R_2 \to R_2 - R_3$ का प्रयोग करने पर		
	दायाँ पक्ष $=\begin{vmatrix}0 & a-b & a^2-b^2\\ 0 & b-c & b^2-c^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$	$1\frac{1}{2}$	

	R_1 में से $a-b$ तथा R_2 में से $(b-c)$ बाहर निकालने पर हम प्राप्त करते हैं		
	LHS = (a-b) (b-c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & b+c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$	$1\frac{1}{2}$	
	अब c_1 की सहायता से प्रसारित करने पर		
	बायाँ पक्ष = (a-b) (b-c) $\left[0-0+1\left(b+c-a-b\right)\right]$		
	= (a - b) (b - c) (c - a) = RHS	1	
	अथवा		
	$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	1	
	KA = K $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2k & 2k \\ 2k & k & 2k \\ 2k & 2k & k \end{bmatrix}$	1	
	51 = 5 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}$	
	अब $A^2 + KA - 5I = 0$		
	$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 2k & 2k \\ 2k & k & 2k \\ 2k & 2k & k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		
	$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4+k & 8+2k & 8+2k \\ 8+2k & 4+k & 8+2k \\ 8+2k & 8+2k & 4+k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1	
	$\Rightarrow 4+k=0$ i.e k = - 4	$\frac{1}{2}$	4

20	$\operatorname{cosec}^{-1}\left(5\sqrt{2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$	1	
	$\therefore$ बायाँ पक्ष $=\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)+\operatorname{cosec}^{-1}\left(5\sqrt{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right)$		
	$=\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right)$		
	$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{7}}{1-\frac{5}{12}.\frac{1}{7}}\right]+\tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right)$	1	
	$=\tan^{-1}\left(\frac{47}{79}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{16}{63}\right)$	$\frac{1}{2}$	
	$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{47}{79}+\frac{16}{63}}{1-\frac{47}{79}.\frac{16}{63}}\right]$	1	
	$=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}=$ दायाँ पक्ष	$\frac{1}{2}$	4
21	(i) मान लीजिए कि x_1, x_2 प्रान्त के ऐसे दो अवयव है कि		
	$f(x_1)=f(x_2)$		
	$\Rightarrow 4x_1+3=4x_2+3$		
	$\Rightarrow x_1=x_2$		
	$\therefore$ f एकैकी फलन है।	$1\frac{1}{2}$	
	(ii) मान लीजिए कि y परिसर का एक ऐसा अवयव है कि $f(x)=y$		
	$\Rightarrow 4x+3=y$, $\Rightarrow x=\frac{y-3}{4}$		
	स्पष्टत: प्रत्येक $y\in$ परिसर के लिए हमेशा $x\in$ प्रान्त है।		
	$\therefore$ प्रत्येक $y\in$ परिसर के लिए एक-एक पूर्व प्रतिबिम्ब का		
	$x=\frac{y-3}{4}\in$ प्रान्त है।		
	$\therefore$ f आच्छादक फलन है।	$1\frac{1}{2}$	

	(iii) क्योंकि f एकैकी और आच्छादाक फलन है इसलिए इसका प्रतिलोम ज्ञात किया जा सकता है। $\therefore\ f^{-1}: R \to R$ होगा और $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{4}$ द्वारा परिभाषित है।	1	4
22	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 5 = 5$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (ax+b) = 2a+b.$ क्योंकि f एक सतत फलन है। $\therefore\quad 2a+b=5 \quad ...(i)$	$1\frac{1}{2}$	
	अब $\lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} (ax+b) = 10a+b$ $\lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 10^+} 21 = 21$ क्योंकि f एक सतत फलन है। $\therefore\quad 10a+b=21 \quad ...(ii)$	$1\frac{1}{2}$	
	(i) तथा (ii) हल करने पर a = 2 and b = 1	1	4
23.	$y = x^{\cos x} + \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\therefore\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\cos x}\right) + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right) \quad ...(i)$	$\frac{1}{2}$	
	मान लीजिए u = $x^{\cos x}$ $\therefore\quad \log u = \cos x . \log x$ $\dfrac{1}{u}.\dfrac{du}{dx} = \cos x.\dfrac{1}{x} + \log x(-\sin x)$ $\Rightarrow\quad \dfrac{du}{dx} = x^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x} - \sin x.\log x\right] \quad ...(ii)$	2	
	$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right]$ $= \dfrac{(x^2-1)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2}$ $= \dfrac{4x}{(x^2-1)^2} \quad ...(iii)$	1	

<table>
<tr><td></td><td>(i), (ii) तथा (iii) से हम प्राप्त करते हैं:
$$\frac{dy}{dx}=x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x}-\sin x.\log x\right]-\frac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>24.</td><td>$$f'(x)=-6x^2-18x-12$$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$=-6\left(x^2+3x+2\right)=-6(x+2)(x+1)$$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>वर्धमान तथा ह्रासमान फलन के लिए
$$f'(x)=0\Rightarrow x=-2,-1.$$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\therefore$ अन्तराल हैं $(-\infty,-2],(-2,-1],(-1,\infty]$</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><td>अन्तराल</td><td>$f'(x)$ का चिन्ह</td><td>निष्कर्ष</td></tr>
<tr><td>$(-\infty,-2]$</td><td>$(-)(-)(-)=-ve$</td><td>f ह्रासमान है</td></tr>
<tr><td>$[-2,-1)$</td><td>$(-)(+)(-)=+ve$</td><td>f वर्धमान है</td></tr>
<tr><td>$[-1,\infty)$</td><td>$(-)(+)(+)=-ve$</td><td>f ह्रासमान है</td></tr>
</table></td><td>$1\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\therefore$ f $[-2,-1)$ में वर्धमान है तथा
$(-\infty,-2]\cup[-1,\infty)$ में ह्रासमान</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>अथवा</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>जब x = 3, y = 22.</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$\frac{dy}{dx}=2x+4.$$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{dy}{dt}$ at $x=3$ पर $=10$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\therefore$ स्पर्श रेखा का समीकरण हैं:</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$(y-22)=10(x-3)$$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$$\Rightarrow 10x-y=8.$$</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>स्पर्श रेखा को x -अक्ष के समांतर होने के लिए</td><td></td><td></td></tr>
</table>

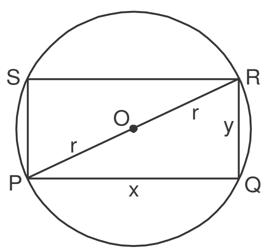
	$f'(x)=0$	$\frac{1}{2}$	
	$\Rightarrow \quad 2x+4=0$		
	$\Rightarrow \quad x=-2$	$\frac{1}{2}$	
	जब x = -2, $\quad y=-3$		
	$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु हैं $(-2,-3)$	$\frac{1}{2}$	4
25.	$I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}, \; I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ ...(i)	1	
	$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx,$ ...(ii)		
	$\left(\therefore \int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx\right)$	1	
	(i) तथा (ii) को जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं		
	$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx=\int_0^{\pi/2}1.dx$	1	
	$=[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$		
	$\therefore \quad I=\frac{\pi}{4}$	1	4
26.	दिए हुए अवकल समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है		
	$\frac{dy}{dx}=\frac{x+3y}{x-3y}$ ...(i)	$\frac{1}{2}$	
	यह एक समघातीय अवकल समीकरण हैं।		
	$\therefore \; y = vx$ प्रतिस्थापित करने पर	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{dy}{dx}=v+x.\frac{dv}{dx}$		
	$\therefore (i)$ निम्न रूप में परिवर्तित हो जाता है।		
	$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+3vx}{x-vx}$		

	$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{1-v}$ $\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v}{1-v} - v = \frac{(1+v)^2}{1-v}$ $\Rightarrow \quad \frac{1-v}{(1+v)^2}dv = \frac{dx}{x}$ $\therefore \quad \int \frac{1-v}{(1+v)^2}dv = \int \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \quad 2\int \frac{1}{(1+v)2}dv - \int \frac{1}{(1+v)}dv = \log x + c_1$ $\Rightarrow \quad \frac{-2}{1+v} - \log\|.1+v\| = \log x + c_1$ $\frac{-2x}{x+y} - \log\left\|\frac{x+y}{x}\right\| - \log x = c_1$ $\frac{-2x}{x+y} - \left[\log\left\|\frac{x+y}{x}.x\right\|\right] = c$ $\Rightarrow \quad \frac{2x}{x+y} + \log\|x+y\| = c_1$ (जहां $c_1 = -c$)	 1 1 1	 4
27.	मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\therefore \quad \vec{b} + \vec{c} = (2+\lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}.$ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2+\lambda & 6 & -2 \end{vmatrix}$ $= \hat{i}(-2-6) - \hat{j}(-2-2-\lambda) + \hat{k}(6-2-\lambda)$ $= -8\hat{i} + (4+\lambda)\hat{y} + (4-\lambda)\hat{k}$	 $\frac{1}{2}$ 1	

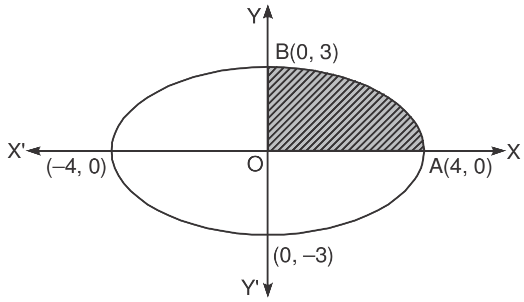
	$\left\|\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right\| = \sqrt{(-8)^2+(4+x)^2+(4-1)^2}$ $= \sqrt{2\lambda^2+96.}$ अब $\sqrt{2\lambda^2+96} = 2\sqrt{26.}$ $\Rightarrow \sqrt{2\lambda^2+96} =$ 104 $\Rightarrow 2\lambda^2 = 8$ $\Rightarrow \lambda^2 = 4$ $\Rightarrow \lambda = \pm 2$	1 1 $\frac{1}{2}$	4
28.	$I = \int \frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}}dx$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{(x-5/4)^2-(1/4)^2}}dx.$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}.\log\left\|\left(x-\frac{5}{4}\right)+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+3/2}\right\|+c_1$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left\|4x-5+2\sqrt{2}\sqrt{2x^2-5x+3}+C\right.$ जहाँ C = c_1 -log 4 **अथवा** $I = \int \frac{3x+2}{(x-1)(2x+3)}$ पुनः मान लीजिए $\frac{3x+2}{(x-1)(2x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x+3}$ $\Rightarrow 3x+2 = A(2x+3)+B(x-1)$ x = - 3/2 रखने पर हमें B = 1 प्राप्त होता है। और x = 1, रखने पर A = 1 प्राप्त होता है। $\therefore I = \int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{1}{2x+3}dx$	$\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$ 1 1 1 1	

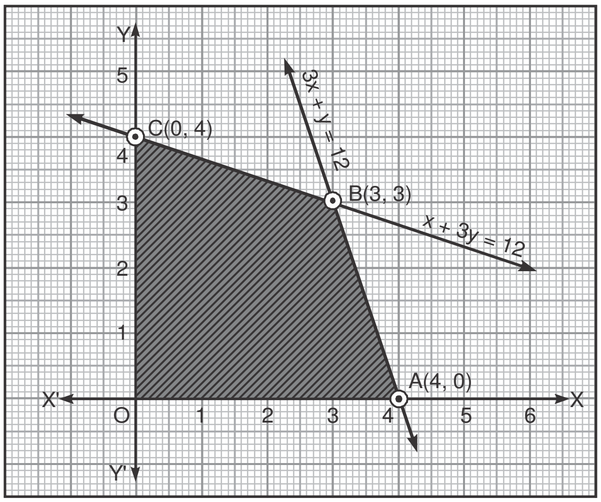
	$= \log\lvert x-1\rvert + \frac{\log\lvert 2x+3\rvert}{2} + c.$	2	4
29.	मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$ $\therefore \quad AX = B$ i.e $\quad X = A^{-1}B.$ (i)	1	
	$\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(12-5)+1(9+10)+2(-3-8)$ $= 7+19-22 = 4 \neq 0.$ $\therefore A^{-1}$ का अस्तित्व है।	1	
	A का सहखंडज $= \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$	2	
	$\therefore A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}$	
	$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	1	
	$\Rightarrow \quad x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3,$	$\frac{1}{2}$	
	अथवा मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$		
	मान लीजिए $A = IA$	$\frac{1}{2}$	

	i.e $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$		
	$R_1 \to \frac{1}{2} R_1$ का उपयोग करने पर $\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$	$\frac{1}{2}$	
	$R_2 \to R_2 - 2R_1$ और $R_3 \to R_3 - 3R_1$ का प्रयोग करते हुए $\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$	1	
	$R_2 \to \frac{1}{5} R_2$ के प्रयोग से $\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$	1	
	$R_1 \to R_1 - \frac{3}{2} R_2$ और $R_3 \to R_3 - \frac{5}{2} R_2$ के प्रयोग से $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/10 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -1 & \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} A$	1	
	$R_3 \to 2R_3$ के प्रयोग से $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/10 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} A$	1	

	$R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_3$ के प्रयोग से		
	$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 & 1/5 & -1 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} A$$		
	अत: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/5 & 1/5 & -1 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	1	6
30.		सही आकृति के लिए $\frac{1}{2}$ अंक	
	A (आयत का क्षेत्रफल) = x . y ...(i)	$\frac{1}{2}$	
	ΔP Q R में, $x^2 + y^2 = 4r^2$		
	$\Rightarrow \quad y = \sqrt{4r^2 - x^2}$ ...(ii)	$\frac{1}{2}$	
	$\therefore A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$	$\frac{1}{2}$	
	मान लीजिए $Z = A^2 = x^2\left(4r^2 - x^2\right)$		
	i.e $Z = 4r^2x^2 - x^4$		
	$\frac{dZ}{dx} = 8r^2x - 4x^3$	1	
	उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के लिए		
	$8r^2x - 4x^3 = 0$		
	$4x\left(2r^2 - x^2\right) = 0$		
	$\Rightarrow x = 0 \quad or \quad x = \sqrt{2}.r$		
	x = 0 सम्भव नहीं हैं	1	

	$\frac{d^2Z}{dx^2} = 8r^2 - 12x^2$		
	$x = \sqrt{2}.r$ के लिए $\frac{d^2Z}{dx^2}$ ऋणात्मक है।	1	
	$x = \sqrt{2}.r$ के लिए $Z = A^2$ अधिकतम (उच्चिष्ठ) है।		
	(ii) से हम प्राप्त करते हैं $y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2}.r$	$\frac{1}{2}$	
	अत: क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि $x = y$	$\frac{1}{2}$	
	अथवा		
	मान लीजिए कि सीट के प्रत्येक कोने से कटे जाने वाले वर्ग की भुजा x है।		
	V (बॉक्स का आयतन) = $(45-2x)(24-2x)(x)$		1
	$V = 4x^3 - 138x^2 + 1080x.$	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 276x + 1080$	1	
	अधिकतम अथवा न्यूनतम के लिए		
	$\frac{dV}{dx} = 0$		
	$\Rightarrow 12x^2 - 276x + 1080 = 0$		
	$\Rightarrow x^2 - 23x + 90 = 0$	1	
	$\Rightarrow (x-18)(x-5) = 0$		
	$\Rightarrow x = 5 \, or \, x = 18$ (सम्भव नहीं हैं)	1	
	$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 276$		
	$x = 5$ के लिए $\frac{d^2V}{dx^2}$ ऋणात्मक है।		
	$\therefore$ $x = 5$ के लिए V अधिकतम है।	1	
	अत: काटे जाने वाले वर्ग की अभीष्ट भुजा 5 सेमी है।	$\frac{1}{2}$	6

31.		1	
	वांछित क्षेत्रफल = 4 × क्षेत्रफल OAB	1	
	$= 4\int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\,dx.$	1	
	$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$	1	
	$= 3\left[0+8\sin^{-1}(1)-0+8\sin^{-1}(0)\right]$	1	
	$= 3\left[\frac{8\pi}{2}\right]$		
	$= \ 12\pi$ वर्ग इकाई	1	6
32.	मान लीजिए $a^{\cdot}(x-1)+b(y-2)+c(z+4)=0$ (1) ...(i)	2	
	वांछित समतल की समीकरण है, क्योंकि समतल दी हुई रेखाओं के साथ लम्बवत् है।		
	$\therefore 2a+3b+6c=0$ ...(ii)	1	
	a + b - c = 0 ...(iii)	1	
	$\frac{a}{-3-6}=\frac{b}{6+2}=\frac{c}{2-3}$		
	$\Rightarrow \frac{a}{-9}=\frac{b}{8}=\frac{c}{-1}$		
	$\frac{a}{9}=\frac{b}{-8}=\frac{c}{1}=\lambda$ (मान लीजिए)		
	$\therefore a=9\lambda,\quad b=-8\lambda,\ c=\lambda$	1	
	a, b, c का मान (i) में प्रतिस्थापित करने पर		
	$9\lambda(x-1)-8\lambda(y-2)+\lambda(z+4)=0$		
	$\Rightarrow 9x-8y+z+11=0.$	1	6
33.	मान लीजिए कि x नटों के पैकेटों और 4 बोल्टों के पैकेटों की संख्या को दर्शाता है।		

<table>
<tr><td></td><td>निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत, z = 20 x + 10 y
का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।
$x+3y \le 12$
$3x+y \le 12$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$x >,0, \quad y >,0.$</td><td>$1\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>सही ग्राफ 2 अंक</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>सुसंगत क्षेत्र के कोनों के बिन्दु हैं।
$O(0,0), A(4,0), B(3,3), C(0,4)$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>O (0,0) पर $Z = 0 + 0 = 0$
A(4, 0) पर $Z = 20\times4+10\times0=80$
B(3, 3) पर $Z = 20\times3+10\times3=60+30=90.$
Z at $(0,4) = 20\times.0+10\times4=0+40=40$</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>अत: अधिकतम लाभ के लिए नट और बोल्ट दोनों के तीन-तीन
पैकेट बनाने चाहिए।</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>6</td></tr>
</table>